

Rapport mi-thèse

Étienne Le Quentrec
thèse dirigée par Mohamed Tajine,
et encadrée par Loïc Mazo et par Étienne Baudrier

29 mai 2020

1 Introduction

Contexte Lorsqu'un objet est acquis numériquement, on obtient une image pixelisée. Ce passage d'un objet décrit par des coordonnées réelles à une image dont les pixels sont repérés par des coordonnées dans $h\mathbb{Z}^n$ (h étant la longueur d'un côté d'un pixel de la grille) cause une perte d'informations. Un des objectifs de la géométrie discrète est d'estimer les informations géométriques de l'objet continu à partir de sa discrétisation.

L'estimation géométrique discrète peut servir dans la plupart des domaines de l'imagerie. Elle est notamment utilisée par les modèles déformables en segmentation d'images. Ces modèles consistent à définir une énergie composée d'un terme d'attache aux données (ressemblance à l'image) et d'un terme de régularisation de la forme (probabilité d'apparition de la forme). Les modèles déformables nécessitent souvent d'estimer des grandeurs géométriques (longueur d'une courbe pour l'énergie de Mumford-Shah ou la courbure pour les snakes) et de pouvoir intégrer sur un domaine discret.

L'objectif de la thèse est de déterminer les conditions pour une bonne estimation des informations géométriques à toutes résolutions de l'image.

Avant d'essayer d'estimer des grandeurs géométriques sur un objet discret, il convient de s'assurer que l'objet continu a bien la topologie attendue. Le paragraphe suivant détaille les notions de topologie discrète.

Topologie d'un objet discret Estimer un périmètre à partir d'un objet discret n'aurait pas de sens si celui-ci était la discrétisation de deux objets distincts. Il est possible de connaître la topologie de l'objet continu si la discrétisation préserve certaines propriétés topologiques. Les deux principales propriétés topologiques utilisées en géométrie discrète en deux dimensions pour étudier un objet sont la k -*connexité* (avec $k = 4, 8$) et la propriété d'être *bien composé*. Ces deux propriétés sont des transcriptions dans le discret des notions de connexité et de l'hypothèse de variété. Deux points p et q de $h\mathbb{Z}^2$ sont 4 -*adjacents* (respectivement 8 -*adjacents*) si le point q est dans le disque fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ (respectivement pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de rayon h centré en

q . La 4-adjacence (respectivement la 8-adjacence) est une relation symétrique et réflexive qui s'étend par fermeture transitive en une relation d'équivalence. Un sous-ensemble de $h\mathbb{Z}^2$ est 4-connexe (respectivement 8-connexe) s'il n'est constitué que d'une seule classe d'équivalence pour cette relation. Un sous-ensemble S de $h\mathbb{Z}^2$ est *bien composé* si les composantes 4-connexes de S (respectivement de S^c , le complémentaire de S relativement à $h\mathbb{Z}^2$) coïncident avec les composantes 8-connexes de S (respectivement de S^c le complémentaire de S relativement à $h\mathbb{Z}^2$) [GL95]. Si ces propriétés sont préservées lors de la discrétisation d'un objet continu, elles permettent de décrire la topologie de celui-ci connaissant sa discrétisation.

Estimation géométrique Dans ce paragraphe, nous définissons notre cadre de travail en estimation géométrique : estimation intégrale sur le bord d'un objet. Les caractéristiques géométriques dont l'estimation a été étudiée en géométrie discrète peuvent être classées en trois catégories : les quantités définies par une intégrale sur tout l'objet (aire, moments, ...), les opérateurs différentiels sur le bord de l'objet (tangentes, normales, courbure, ...) et celles définies par une intégrale sur le bord de l'objet (longueur, courbure totale, ...). Il a été montré depuis longtemps que les estimateurs des quantités intégrales sur l'objet sont précis (voir par exemple théorème 2.2, section 2.4.2 [KR04] ou théorème 8 [KZ00]). La définition d'estimateurs d'opérateurs différentiels précis est plus récente (voir par exemple [dVL09] [Lac]). Le lecteur trouvera un état de l'art plus détaillé pour ces estimateurs dans [LT14]. Ici nous nous concentrons sur les estimateurs de quantité définie par une intégrale le long du bord de l'objet et plus spécifiquement sur l'estimation de longueur.

Par la suite, nous considérerons toujours les objets homéomorphes à un disque, ou de façon équivalentes les objets dont le bord est une courbe de Jordan. Nous donnons ici un bref état de l'art des estimateurs de longueurs. Pour un état de l'art plus détaillé voir [MB16]. La plupart des méthodes d'estimation consistent à découper la courbe discrète $\partial_h(\mathcal{C})$ en morceaux et à sommer les longueurs associées à chaque morceau. La façon de partitionner la courbe discrète en arcs déterminent une classification des méthodes d'estimation de longueur. Si le nombre de pixels par arc ne dépend ni de la courbe, ni du pas de la grille h , l'estimateur est dit *local*. Si le nombre de pixels par arc est déterminé algorithmiquement en fonction de la forme discrète, l'estimateur est dit *adaptatif*. Il existe deux types d'estimateurs de longueur adaptatifs : les MDSS (Maximal Digital Straight Segment) et les MLP (Minimal Length Polygons). Les premiers consistent à détecter des segments de droite dans la courbe discrète $\partial_h(\mathcal{C})$ et les seconds consistent à déterminer le polygone de longueur minimale dans une marge autour de la courbe discrète. Une troisième classe d'estimateurs sont les estimateurs *semi-locaux* : le nombre de pixels par arc tend vers $+\infty$ et le diamètre maximal des arcs tend vers 0 (par exemple s'il y a \sqrt{h} pixels dans chaque arc). Afin de définir un cadre général pour ces deux derniers estimateurs la notion d'estimateurs *non-locaux* a été introduite dans [MB16] : le nombre moyen de pixels par arc tend vers $+\infty$ mais la taille moyenne d'un arc tend vers 0

Estimateur	Classe de courbes	Preuve de la convergence multirésolution	vitesse de convergence
MDSS	convexe C^3 avec courbure positive	théorème 5.36 [Lac]	$O(h^{1/3})$
	polygones convexes	théorème 12 [KZ00]	$O(h)$
GC-MLP	courbes convexes	pour la discrétisation de Jordan théorème 4.15 [SZS98]	$O(h)$
AS-MLP	polygone convexe	théorème 2 [AKKO01]	$O(h)$
Estimateur non-local	graphe d'une fonction lipschitzienne graphe d'une fonction $C^{1,1}$	corollaire 1 [MB16] corollaire 2 [MB16]	- $O(M_1^h + \frac{h}{M_1^h})$
MDSS	graphe d'une fonction lipschitzienne	théorème 8 [MB16]	-

TABLE 1 – Sauf mention du contraire la convergence est étudiée pour la discrétisation de Gauss. La vitesse de convergence des MDSS est obtenue à partir d'un théorème plus général utilisé pour intégrer une fonction. Une courbe est dite $C^{1,1}$ si elle est C^1 et si ses tangentes unitaires sont des fonctions lipschitziennes.

quand le pas de la grille h tend vers 0. Il existe également des estimateurs de longueurs qui ne se basent pas sur la longueur d'un polygone dont les sommets appartiennent à la courbe discrète mais sur l'estimation des tangentes par exemples (voir [Lac]).

Afin d'évaluer la précision d'un estimateur géométrique à un pas de grille h fixé, un critère est de donner une majoration théorique de la différence entre la quantité géométrique exacte et son estimation. Afin d'évaluer sa précision asymptotique, nous utiliserons un critère couramment utilisé en géométrie discrète : la *convergence multirésolution* : l'erreur d'estimation tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Même si les estimateurs locaux sont les plus simples à utiliser, ils ne vérifient pas la propriété de convergence multirésolution pour un nombre important de courbes [TD11]. Les résultats théoriques de convergence multirésolution des estimateurs de longueurs sont rassemblés dans le tableau 1.

Hypothèses sur la forme continue La précision d'un estimateur ne dépend pas seulement du pas de la grille mais également des hypothèses sur la courbe. C'est pourquoi l'erreur d'estimation est toujours calculée pour une certaine classe de courbes (tableau 1). Pour pouvoir estimer une quantité géométrique sur une forme, la complexité de la courbe doit être suffisamment faible par rapport à la quantité d'information contenue dans la discrétisation. Des hypothèses sur la géométrie de la courbe sont nécessaires pour contrôler cette complexité. Ces hypothèses géométriques doivent être conçues pour permettre de déterminer le pas de grille h en deçà duquel la discrétisation contient suffisam-

ment d'informations pour estimer une quantité géométrique sur la courbe. C'est pourquoi cette caractéristique géométrique ne doit dépendre que de la courbe (et non pas de l'orientation ou de la taille de la grille). Une des hypothèses les plus répandues en géométrie discrète est la $\text{par}(r)$ -régularité (définition 6). Cette notion a été introduite par Pavlidis dans [Pav82] et reformulée par Serra dans [Ser82] et par Latecki et al. dans [GL95]. La famille des courbes $\text{par}(r)$ -régulières excluent les courbes présentant des points angulaires comme les polygones (voir figure 7). Il existe différentes tentatives de généralisation de la $\text{par}(r)$ -régularité dans la littérature incluant des courbes contenant des points angulaires : semi-régularité ([ST08]), r -stabilité ([MKS09]), quasi(r)-régularité ([NKDRP17]), la μ -portée ([CCSL09]), mais aucune de ces notions n'excluent les artefacts de la courbe continue qui empêchent l'estimation de longueur, mis à part, peut-être la μ -portée. Pour un état de l'art détaillé de ces notions, voir [LQMBT20].¹

Afin de proposer un cadre unifié pour l'estimation de longueur et pour la préservation de la topologie sur une classe de courbes incluant les courbes polygonales, nous proposons de nouvelles hypothèses basées sur la notion de courbure totale.

Notre approche La *courbure totale* d'une courbe est une généralisation de l'intégrale de la courbure d'une courbe. La courbure totale peut être interprétée comme la quantité par laquelle une courbe dévie d'une ligne droite. Nous considérerons deux familles de courbes : les courbes dont la courbure totale est fonction lipschitzienne de sa longueur (définition 5) et les courbes dont les petits arcs ont une courbure totale bornée (définition 3). La notion de courbes à courbure totale localement bornée a été introduite dans [LQMBT20], [LQMBT19] et la notion de courbes à courbure totale lipschitzienne dans [LQMBT20] (Lemma 5).

La pertinence du modèle de discrétisation choisi doit être évaluée à l'aune de sa cohérence avec le choix des hypothèses sur l'objet continu. En effet, même si la discrétisation de Gauss choisie ici comme modèle de discrétisation est assez simpliste, la discrétisation obtenue est assez réaliste pour la classe de courbes choisies (Propriété 9).

La majoration de l'erreur d'un estimateur non-local consiste à comparer la longueur d'un polygone dont les sommets sont sur la reconstruction de la courbe $\partial_h(\mathcal{C})$ et la longueur de la courbe \mathcal{C} . Une étape importante dans notre approche est d'associer les côtés du polygone à des arcs partitionnant la courbe continue \mathcal{C} et de majorer la différence de longueur entre chaque côté et son arc associé. Le problème d'associer des points partitionnant la courbe discrète $\partial_h(\mathcal{C})$ à des points proches partitionnant la courbe continue \mathcal{C} est équivalent à définir une application qui transforme une suite de points ordonnés sur $\partial_h(\mathcal{C})$ à une suite de points ordonnés sur \mathcal{C} proches de leurs antécédents. Il est à noter que cette étape n'est pas nécessaire pour les classes de courbes les plus élémentaires comme les polygones convexes où la majoration de l'erreur d'estimation de la longueur

1. D'autres notions peuvent être utilisées pour les courbes qui sont des graphes de fonctions comme imposer que la fonction ou sa dérivée soit lipschitzienne. (voir [MB16])

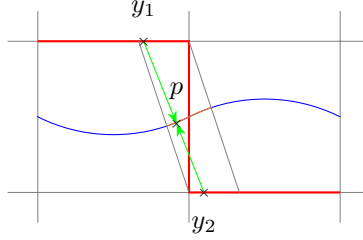


FIGURE 1 – En bleu et orange la courbe \mathcal{C} , en rouge sa discrétisation $\partial_h(\mathcal{C})$. La projection sur la courbe \mathcal{C} est représentée par les flèches vertes. Les points y_1 et y_2 ont la même image p par la projection. L'ensemble des points de \mathcal{C} étant l'image d'au moins deux points de $\partial_h(\mathcal{C})$ est représentée en orange. Lorsqu'un point y de $\partial_h(\mathcal{C})$ se déplace de la gauche vers la droite, la partie orange est parcourue trois fois par son image. (voir Figure B.2[Lac])

est basée sur d'autres arguments (voir [KZ00]). Dans [LT14], la courbe discrète tout entière est associée à la courbe continue \mathcal{C} par la projection sur le plus proche voisin définie dans [Fed69]. Cette projection est bien définie pour des courbes par-régulières. De plus cette projection est surjective mais pas toujours injective (voir figure 1), c'est-à-dire que la projection ne conserve pas l'ordre points de la courbe. Cependant la longueur de la partie de \mathcal{C} « non-injective » de la projection peut être majorée (voir [LT14]). En l'absence d'hypothèse sur l'objet continu S , la seule information que nous fournit $\partial_h(\mathcal{C})$ est l'appartenance d'un nombre fini de points de la grille à la forme S . Aussi la reconstruction $\partial_h(\mathcal{C})$ ne doit pas être comprise comme une transcription fidèle de \mathcal{C} mais plutôt comme une quantité finie d'information sur l'appartenance des points de la grille à S . Prenant en compte la perte d'information causée par la discrétisation, au lieu de projeter l'ensemble de la reconstruction $\partial_h(\mathcal{C})$ sur la courbe continue \mathcal{C} , nous préférons associer seulement certains points d'échantillonnage de $\partial_h(\mathcal{C})$ sur la courbe continue. Un de nos objectifs est de prouver qu'une telle application (Figure 2, définition 11) conserve l'ordre de certains points de $\partial_h(\mathcal{C})$ (Théorème 3). Cela est traduit par le concept de chaînes (définition 1) et de semi-chaînes (définition 12). De plus les points associés aux points de $\partial_h(\mathcal{C})$ partitionnent la courbe \mathcal{C} en arcs de petites courbures (le cas décrit dans la figure 15 est impossible).

Chronologie de la thèse La thèse a été précédée par un stage de mars à juillet 2018 portant sur l'estimation de longueur sur des courbes paramétrées. C'est durant ce stage que le problème de l'association d'une partition de la courbe discrète à une partition de la courbe continue a été soulevé et que la notion de courbe à courbure totale bornée a été introduite. Au début de la thèse nous avons montré que cette hypothèse permet de prouver que la discrétisation est bien composée. Cette preuve a fait l'objet d'une communication présentée en

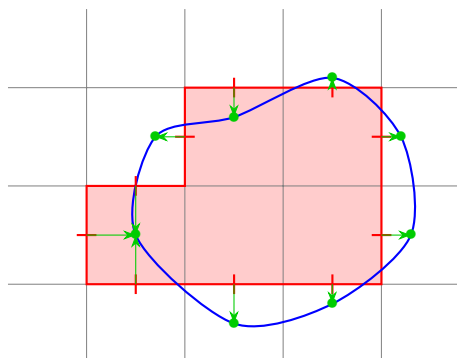


FIGURE 2 – En bleu, la courbe continue, en rouge sa discrétisation. Les flèches vertes correspondent à l’association des points échantillonnant de la courbe discrétisée sur la courbe continue. Plusieurs points peuvent être associés à un même point mais l’ordre des points de la courbe discrète est préservée par l’association

mars 2019 [LQMBT19]. Cette communication a été étendue en article de journal pour inclure la démonstration que cette notion de courbure totale bornée est une généralisation de la par-régularité et qu’elle permet de garantir la 4-connexité de la discrétisation d’un objet homéomorphe à un disque. Ce dernier article a été accepté 8 mars 2020 pour publication. Un article de journal portant sur la résolution de la problématique de l’association et l’estimation de périmètre est en cours de rédaction.

2 Hypothèses sur la forme continue

Le but de cette partie est de présenter différentes hypothèses utilisées sur la forme continue et d’exhiber leurs liens.

2.1 Courbure totale

Dans cette sous-partie nous rappelons la définition de la courbure totale et ses propriétés élémentaires. La référence principale est le livre d’Alexandrov et Reshetnyak [AR89]. Généralement la convergence des estimateurs géométrique est établie pour des courbes vérifiant certaines hypothèses de régularité (au moins deux fois différentiable le plus souvent). Mais comme le remarquent Alexandrov et Reshetnyak dans [AR89] : « It should be remarked that differential geometry commonly studies only the curves obeying certain conditions of regularity. These conditions are imposed by the requirement that the apparatus of differential calculus be applied, but they are hardly justified in a geometrical sense ». Nous préférons utiliser des hypothèses basées sur la courbure totale. Afin de pouvoir considérer des polygones et des courbes régulières

simultanément, nous utilisons la définition de courbure totale introduite par Milnor [Mil50].

Afin de définir la courbure totale, fixons d'abord les notations pour les angles. L'angle entre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est noté (\vec{u}, \vec{v}) ($(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). L'angle géométrique entre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , noté $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ est la valeur absolue du représentant de l'angle dans $] -\pi, \pi]$. Ainsi, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$.

Définition 1 (Courbure Totale).

- Une suite (a_j) de points d'une courbe simple \mathcal{C} est une *chaîne* s'il existe une paramétrisation injective γ de \mathcal{C} telle que pour tout $i < j$, il existe t_i, t_j tels que $\gamma(t_i) = a_i, \gamma(t_j) = a_j$ et $t_i < t_j$. Une ligne polygonale ou un polygone est inscrit dans \mathcal{C} si la suite de ses sommets forme une chaîne de \mathcal{C} .
- La courbure totale $\kappa(L)$ d'une ligne polygonale $L = [x_i]_{i=0}^N$ est définie par :

$$\kappa(L) := \sum_{i=1}^{N-1} \angle(x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i).$$

- La courbure totale $\kappa(P)$ d'un polygone $P = [x_i]_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ est définie par :

$$\kappa(P) := \sum_{i=1}^N \angle(x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i).$$

- La courbure totale $\kappa(\mathcal{C})$ d'une courbe simple \mathcal{C} (respectivement d'une courbe de Jordan) est la borne supérieure des courbures totales des lignes polygonales (respectivement des polygones) qui lui sont inscrites.

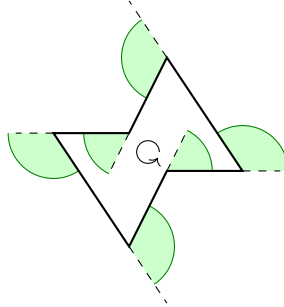


FIGURE 3 – La courbure totale du polygone est la somme des angles verts.

La propriété 1 permet d'estimer asymptotiquement la longueur et la longueur totale de la courbe avec des points d'échantillonnage.

Propriété 1 (Convergence de la longueur et de la courbure totale de lignes polygonales inscrites [AR89], p. 23, 30, 121, 122). *Soit \mathcal{C} une courbe simple*

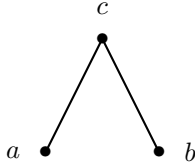


FIGURE 4 – La courbure totale des arcs délimités par a , c et c , b est nulle, cependant la courbure totale de la réunion de ces deux arcs est non-nulle.

et $(L_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de lignes polygonales inscrites dans \mathcal{C} avec les mêmes extrémités que \mathcal{C} . Si $\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda_m = 0$, où λ_m est la longueur maximale d'un côté de la ligne polygonale L_m , alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(L_m) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$$

et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \kappa(L_m) = \kappa(\mathcal{C}),$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ est la longueur de la courbe \mathcal{C} . De plus, si la courbure totale $\kappa(\mathcal{C})$ est finie, alors la longueur $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ est également finie (c-à-d \mathcal{C} est rectifiable).

La courbure totale est une généralisation de la notion de courbure différentielle (propriété 2) mais peut aussi être comprise comme un défaut de convexité (théorème de Frenkel 3).

Propriété 2 (Courbure totale des courbes deux fois différentiable [AR89], p. 133). Soit $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation par longueur d'arc² d'une courbe simple \mathcal{C} de classe C^2 . Notons $k(s)$ la courbure de \mathcal{C} au point $\gamma(s)$. Alors,

$$\kappa(\gamma) = \int_0^\ell |k(s)| ds.$$

Une courbe de Jordan sépare le plan en deux composantes connexes l'une bornée l'autre non. L'intérieur d'une courbe de Jordan désigne la composante connexe bornée.

Propriété 3 (Théorème de Fenchel [AR89], Theorem 5.1.5). Pour toute courbe de Jordan \mathcal{C} , $\kappa(\mathcal{C}) \geq 2\pi$. De plus la minoration est atteinte si et seulement l'intérieur de la courbe de Jordan \mathcal{C} est convexe.

Comme l'illustre la figure 4 la relation de Chasles n'est pas directement transposable pour la courbure totale. La propriété 4 en propose un équivalent.

Propriété 4 (Theorem 3.3.3 p. 53 and Theorem 5.1.3 p. 122 [AR89]). Soit \mathcal{C} une courbe simple d'extrémités a et b et c un point de \mathcal{C} distinct de ses extrémités.

2. Une paramétrisation γ d'une courbe \mathcal{C} est une paramétrisation par longueur d'arc si pour tout $s_0, s_1 \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$, $\mathcal{L}(\gamma[s_0, s_1]) = s_1 - s_0$.

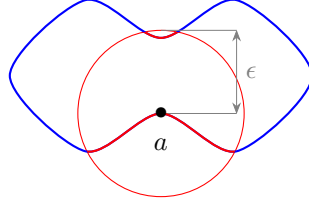


FIGURE 5 – La contrainte de connexité locale interdit les amincissements de la forme. Cela montre que la distance de θ -virage peut être comprise comme une épaisseur de la forme.

Notons $e_l(c)$ et $e_r(c)$ les vecteurs demi-tangents unitaires au point c . Alors la courbure totale de \mathcal{C} est finie si et seulement si la courbure totale des deux sous-arcs de \mathcal{C} \mathcal{C}_a^c (respectivement \mathcal{C}_c^b) d'extrémités a et c (respectivement d'extrémités c et b) est finie, auquel cas :

$$\kappa(\mathcal{C}) = \kappa(\mathcal{C}_a^c) + \angle(e_l(c), e_r(c)) + \kappa(\mathcal{C}_c^b).$$

Dans le cas où $a = b$ (\mathcal{C} est fermée), l'égalité précédente devient :

$$\kappa(\mathcal{C}) = \angle(e_l(c), e_r(c)) + \kappa(\mathcal{C} \setminus \{c\}).$$

2.2 Courbes à courbure totale localement bornée

Dans la sous-partie précédente, nous avons rappelé la définition de la courbure totale qui servira de mesure de la quantité d'information d'une courbe. Dans cette sous-partie nous définissons une forme de contrôle de cette courbure totale et exposons les principales propriétés des courbes correspondantes.

Chaque courbe possède une grandeur géométrique paramétrée par θ appelée *distance de θ -virage* (potentiellement nulle ou infinie). Cette distance de θ -virage peut être comprise comme une épaisseur de la forme délimitée par la courbe \mathcal{C} (voir figure 5).

Définition 2 (Distance de θ -virage). La *distance de θ -virage* $\sigma_{\mathcal{C}}(\theta)$ d'une courbe de Jordan \mathcal{C} est la borne inférieure des distances entre deux points de \mathcal{C} ne pouvant être joints par un arc de \mathcal{C} de courbure totale inférieure ou égale à θ .

Nous définissons maintenant la classe de courbes dont la distance de θ -virage est supérieur à un seuil δ .

Définition 3 (Courbe à courbure totale localement bornée). Soit $\theta \geq 0$ et $\delta \geq 0$. Une courbe de Jordan \mathcal{C} est de *courbure totale localement bornée par (θ, δ)* que l'on abrège en (θ, δ) -CTLB si pour tout paire (a, b) de points de \mathcal{C} telle que $d(a, b) < \delta$, il existe un arc de \mathcal{C}_a^b de courbure totale inférieure ou égale à θ joignant a et b .

Les propositions 1 et 3 illustrent les contraintes géométriques des courbes CTLB : la première interdit les points angulaires trop importants, la seconde impose à l'intérieur d'une courbe CTLB une certaine épaisseur. Le corollaire 1 et le lemme 1 donnent des indications sur les dimensions d'une courbe CTLB.

Proposition 1. *Soit \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta < \pi$. Pour tout point $p \in \mathcal{C}$, l'angle $\angle(e_l(p), e_r(p))$ est inférieur ou égal à θ où $e_l(p)$ et $e_r(p)$ sont respectivement les vecteurs tangents unitaire à gauche et à droite.*

Proposition 2. *Soit \mathcal{C} une courbe simple (θ, δ) -CTLB. Soient a et b deux points de \mathcal{C} tels que $d(a, b) < \delta$. L'arc de \mathcal{C} délimité par a et b de plus petite courbure totale est inclus dans l'union des disques tronqués tels que le segment $[a, b]$ est vu sous un angle supérieur ou égal à $\pi - \theta$ (voir Figure 6).*

En particulier toute arc de courbure totale inférieure à $\frac{\pi}{2}$ et d'extrémités a et b est inclus dans le disque de diamètre $[a, b]$.

Proposition 3. *Soit \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \in]0, \pi/2]$ et soit $a \in \mathcal{C}$. Alors pour tout $\epsilon \leq \delta$, l'intersection de \mathcal{C} avec le disque ouvert $B(a, \epsilon)$ est connexe par arcs.*

La proposition n'est vraie que pour $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. En effet l'intersection d'un polygone possédant un point angulaire aigu et d'une boule centrée en un point proche de ce point angulaire et de rayon suffisamment petit n'est pas connexe.

Corollaire 1. *Une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \in]0, \pi/2]$ a une courbure totale finie et est rectifiable.*

Par le théorème 5.1.2 [AR89], toute courbe à courbure totale finie possède un vecteur tangent à gauche et à droite. Le corollaire 1 garantit alors l'existence des demi-tangentes.

Lemme 1. *Soit \mathcal{C} une courbe de Jordan. Pour tout $\theta < 2\pi/3$,*

$$\sigma_{\mathcal{C}}(\theta) \leq \text{diam}(\mathcal{C}),$$

où $\text{diam}(\mathcal{C})$ est le diamètre de \mathcal{C} .

Un problème récurrent de la définition 3 est que pour deux points a et b à distance strictement inférieure de δ sur un courbe de Jordan (θ, δ) -CTLB \mathcal{C} , on ignore lequel des deux arcs entre a et b est de courbure totale majorée par θ . La proposition 2 permet de différencier l'arc de courbure totale bornée : c'est celui qui est inclus dans le disque de diamètre $[a, b]$. En effet par le lemme 1, l'autre arc ne peut pas être inclus dans un disque de diamètre inférieur à δ . L'unicité de l'arc à courbure bornée est alors une conséquence direct du lemme 1 et de la proposition 2. Afin de lever l'ambiguïté, par la suite l'arc de courbure totale majorée sera appelé *plus petit arc entre a et b* .

Définition 4. Soient $\theta \in]0, \pi/2]$ et \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB. Pour tout $a, b \in \mathcal{C}$ tel que $0 < d(a, b) < \delta$, il existe un unique arc de \mathcal{C} entre a et b de courbure totale inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$. Cet arc est appelé *le plus petit arc entre a et b* .

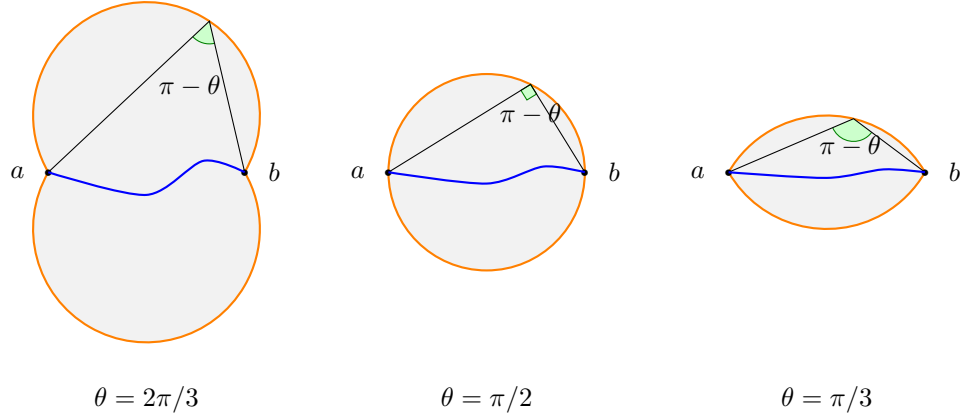


FIGURE 6 – En fonction de la valeur de $\theta < \pi$, il est possible de délimiter le domaine dans lequel se trouve un arc d'extrémités connus et de courbure totale inférieure à θ

Les limitations sur la courbure totale interdisent aux courbes CTLB de faire localement des demi-tours.

Proposition 4. Soit $\theta \in]0, \pi/2]$ et \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB. Soit $\gamma : [0, t_M] \rightarrow \mathcal{C}$ une paramétrisation injective de \mathcal{C} et $t_m \in]0, t_M[$ tel que l'arc $\gamma([0, t_m])$ soit inclus dans $B(\gamma(0), \frac{\delta}{2})$. Alors la restriction de l'application $t \mapsto \|\gamma(t) - \gamma(0)\|$ sur $[0, t_m]$ est croissante.

2.3 Courbes à courbure totale lipschitzienne

Même si la courbure totale d'un plus petit arc d'une courbe CTLB est majorée, on ignore la répartition précise de la courbure totale sur cet arc. L'hypothèse suivante (définition 5) impose un contrôle plus strict de la courbure et contraint sa répartition.

Définition 5. Une courbe \mathcal{C} est à courbure totale k -lipschitzienne si pour tout sous-arc \mathcal{A} de \mathcal{C} ,

$$\kappa(\mathcal{A}) \leq k\mathcal{L}(\mathcal{A}).$$

Intuitivement une courbe est à courbure totale k -lipschitzienne si sa courbure en tout point est inférieure à celle d'un cercle de rayon $\frac{1}{k}$. La propriété suivante permettra de comparer la longueur d'un arc de cercle avec la longueur d'un arc d'une courbe k -lipschitzienne. La propriété 5 énonce qu'à longueur fixe l'arc maximisant la distance entre ses extrémités est l'arc de courbure la plus faible. Cette propriété nous permettra par la suite de majorer la longueur d'un arc à

courbure totale k -lipschitzienne à extrémités fixées par la longueur d'un arc de cercle de rayon $\frac{1}{k}$ de mêmes extrémités.

Propriété 5 (Théorème de comparaison de Schur [Bob08], p. 150). *Soit γ et $\bar{\gamma}$ deux courbes simples paramétrées par longueur d'arc sur $[0, L]$ telles que :*

- $[\bar{\gamma}(0), \bar{\gamma}(L)] \cup \bar{\gamma}([0, L])$ est une courbe de Jordan d'intérieur convexe.
- pour tout sous-intervalle $I \subset [0, L]$,

$$\kappa(\gamma(I)) \leq \kappa(\bar{\gamma}(I)).$$

Alors,

$$\|\bar{\gamma}(L) - \bar{\gamma}(0)\| \leq \|\gamma(L) - \gamma(0)\|.$$

2.4 Comparaison avec la par-régularité

La par-régularité est une des notions les plus couramment utilisées en géométrie discrète pour contrôler le bord d'une forme continue. Elle possède différentes formulations équivalentes (voire figure 6). Il est donc naturel de comparer les courbes CTLB aux courbes par-régulières. Intuitivement une forme par-régulière est une forme possédant une certaine épaisseur (elle est CTLB) et dont le bord a une courbure contrôlée (elle est à courbure totale lipschitzienne).

Définition 6 (par-régularité). Soit \mathcal{C} une courbe de Jordan d'intérieur K

- Une boule fermée $\bar{B}(c_i, r)$ est une *boule osculatrice intérieure* de rayon r de \mathcal{C} au point $a \in \mathcal{C}$ si $\mathcal{C} \cap \bar{B}(c_i, r) = \{a\}$ et $\bar{B}(c_i, r) \subset K \cup \{a\}$.
- Une boule fermée $\bar{B}(c_e, r)$ est une *boule osculatrice extérieure* de rayon r de \mathcal{C} au point $a \in \mathcal{C}$ si $\mathcal{C} \cap \bar{B}(c_e, r) = \{a\}$ et $\bar{B}(c_e, r) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus (\mathcal{C} \cup K)) \cup \{a\}$.
- Une courbe \mathcal{C} est *par(r)-régulière* s'il existe une boule osculatrice intérieure et extérieure de rayon r en tout point de \mathcal{C} .

Une courbe par-régulière \mathcal{C} a une portée positive. Autrement dit, il existe une marge autour de \mathcal{C} , en-deçà de laquelle la projection sur \mathcal{C} est bien définie : pour tout point à l'intérieur de cette marge, il existe un unique plus proche voisin dans \mathcal{C} .

Définition 7 (portée, [Fed69]). L'*axe médian* d'un ensemble compact K est l'ensemble des points ayant au moins deux plus proches voisins dans K . La *portée* est la distance minimale entre K et son axe médian.

Les relations entre les différentes notions sont résumées dans la figure 7.

En chaque point d'une courbe par(r)-régulière \mathcal{C} , il existe deux disques tangents à la courbe en ce point que la courbe ne peut intersecter. Le contournement de ces deux disques contraint localement la courbure totale de la courbe \mathcal{C} : elle est à courbure totale $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. De plus la contrainte sur l'existence de ces deux disques impose également à l'intérieur de la courbe et à son complémentaire d'avoir une certaine épaisseur : la courbe est (θ, δ) -CTLB. Ces deux propriétés ne sont pas seulement des conséquences de la propriété de par-régularité, mais elles en sont des caractéristiques (théorème 1).

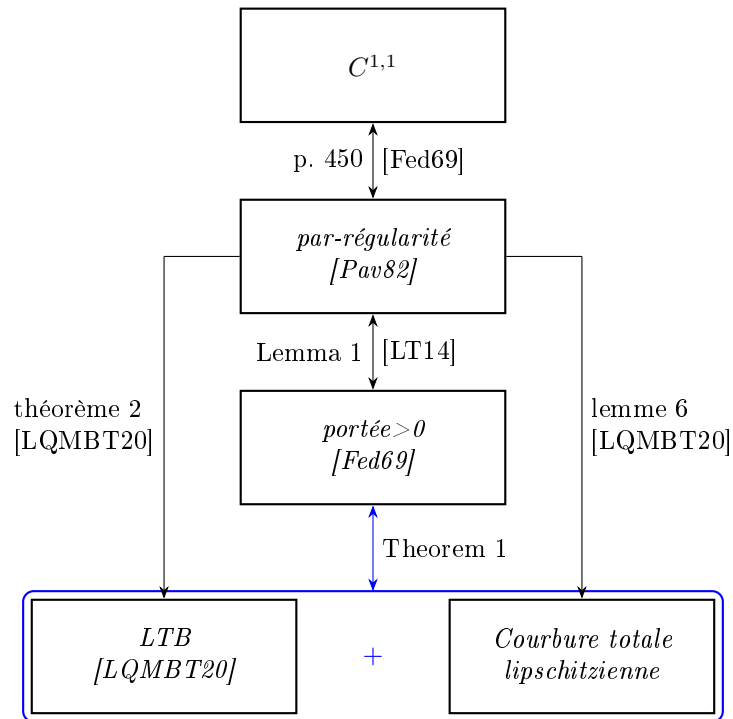


FIGURE 7 – Chaque rectangle correspond à une notion. Une flèche d’une notion vers une autre signifie que si une courbe vérifie la première propriété, alors elle vérifie la seconde. Une courbe est de classe $C^{1,1}$ si elle paramétrisée par longueur d’arc par une fonction différentiable et si ses tangentes sont lipschitziennes.

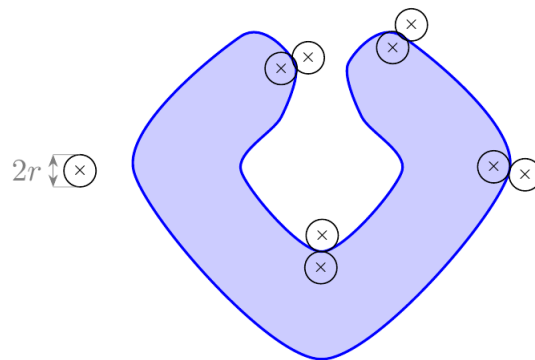
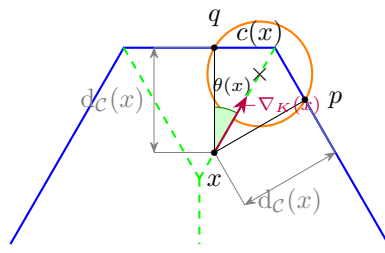
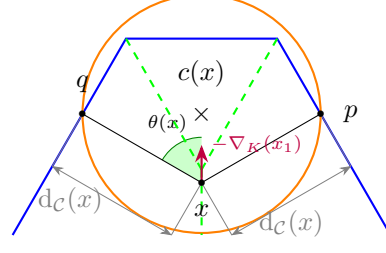


FIGURE 8 – La $\text{par}(r)$ -régularité exige qu’en tout point de la frontière de la forme, il existe une boule osculatrice intérieure et extérieure de rayon r .



(a) Lorsque les différents plus proche voisins d'un point x sur K sont proches les uns des autres la norme du gradient généralisé est proche de 1.



(b) Lorsque les différents plus proche voisins d'un point x sur K sont loins les uns des autres la norme du gradient généralisé est proche de 0.

FIGURE 9 – K un ensemble compact. $-\nabla_K(x)$: généralisation du gradient de la distance à \mathcal{C} . $\Gamma_K(x)$: plus petit disque contenant les plus proches point de x sur K .

Théorème 1. Une courbe \mathcal{C} est par-régulière si et seulement si \mathcal{C} est CTLB et si \mathcal{C} est à courbure totale lipschitzienne.

Plus précisément, une courbe \mathcal{C} est par(r)-régulière si et seulement si \mathcal{C} est $(\theta, 2r \sin(\frac{\theta}{2}))$ -CTLB avec $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ et si \mathcal{C} est à courbure totale $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. Les valeurs données sont optimales (cas du cercle). En revanche, une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ et à courbure totale $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne est par($\min(r, \frac{\delta}{2})$)-régulière. L'équivalence du théorème 1 n'est donc que qualitative : lorsque les valeurs de θ , δ et r sont fixées, l'équivalence est perdue.

les valeurs de r , δ et θ ne sont pas dans le théorème 1.

2.5 Comparaison avec la μ -portée

La μ -portée est une généralisation de la notion de portée (et donc de la notions de par-régularité) aux courbes polygonales. Cette propriété permet de garantir une reconstruction de l'homotopie à partir de points échantillonnant une courbe avec un certain μ -reach (théorème 6). Il est donc naturel de comparer ces deux généralisations de la par-régularité : le μ -reach et les courbes CTLB. Ce qui est fait dans le théorème 2. Ce résultat a été établi par Clément Jacquot, stagiaire, alors étudiant en licence 3 à Jussieu, pendant l'été 2019.

Définition 8 (μ -portée, [CCSL09]).

— Soit K un ensemble compact. Le *gradient généralisé* ∇_K est le gradient de la distance de x à K , $d(x, K)$, étendu à l'axe médian de K par

$$\nabla_K(x) := \frac{x - c(x)}{d(x, K)}$$

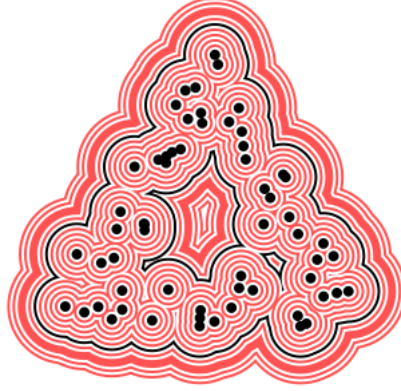


FIGURE 10 – Les points noirs échantillonnent un triangle équilatéral K : l'ensemble des points noirs K' est proche, au sens de la distance de Hausdorff, du triangle K . Le théorème 6 prédit des valeurs pour lesquels la dilatation de l'ensemble de points K' est homotopiquement équivalent à la dilatation de K (frontière rouge épaisse). Figure issue de [CCSL09]

avec $c(x)$ le centre du plus petit cercle $\Gamma_K(x)$ contenant les plus proches voisins de x sur K (voir Figure 9).

- Un point est μ -critique si $\|\nabla_K(x)\| \leq \mu$.
- Le μ -portée $r_\mu(K)$ est l'infimum des distances entre K et un point μ -critique.

Notons que $\|\nabla_K(x)\| = \cos(\theta(x))$ où $\theta(x)$ est l'angle sous lequel x voit ses plus proches voisins sur K (voir figure 9). Ainsi le μ -portée est la plus grande distance à K , en deçà de laquelle tous les points voient l'ensemble de ses plus proches voisins sur K sous un angle inférieur à $2\arccos(\mu)$. Ainsi pour $\mu = 1$, on obtient $r_1(K) = \text{portée}(C)$.

Propriété 6 ([CCSL09]). *Pour K, K' ensembles compacts et κ, α tels que :*

- $d_H(K, K') \leq \kappa r_\mu(K')$,
- $\kappa < \frac{\mu^2}{5\mu^2 + 12}$,
- $\frac{4d_H(K, K')}{\mu^2} \leq \alpha < r_\mu(K') - 3d_H(K, K')$,

$(K^\alpha)^c$ est homotopiquement équivalent à K'^c et K^α est homotopiquement équivalent à K'^α , pour η suffisamment petit, en notant A^ϵ l'ensemble A dilaté par une boule de rayon ϵ et d_H la distance de Hausdorff.

Un ensemble K peut être reconstitué à homotopie près avec un ensemble K' l'échantillonnant (voir figure 10) Le théorème 2 démontré par Clément Jacquot permet de faire le lien avec les courbes CTLB.

Théorème 2. *Soit C une courbe à courbure localement bornée par $(\theta \leq \pi, \delta)$. On note $\omega(C) := \lim_{\mu \rightarrow 0} r_\mu(C)$.*

— Si $r_{\cos \frac{\theta}{2}}(\mathcal{C}) < \omega(\mathcal{C})$, alors

$$\delta \leq 2r_{\cos \frac{\theta}{2}}(\mathcal{C}).$$

— Soit $\mu \in]0, 1]$. Si $r_\mu(\mathcal{C}) = \omega(\mathcal{C})$ et si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors

$$\delta \leq 2r_\mu(\mathcal{C}).$$

Corollaire 2. Pour \mathcal{C} courbe localement bornée par (θ, δ) , et K ensemble compact tels que $d_H(K, \mathcal{C}) \leq \kappa\delta$, κ, α des constantes vérifiant les majorations suivantes,

— si $r_{\cos \frac{\theta}{2}}(\mathcal{C}) < \omega(\mathcal{C})$,

$$\kappa < \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{5 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 12},$$

$$4 \frac{d_H(K, \mathcal{C})}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \leq \alpha < \frac{\delta}{2} - 3d_H(K, \mathcal{C});$$

— si $r_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\mathcal{C}) < \omega(\mathcal{C})$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\kappa < \frac{1}{29},$$

$$8d_H(K, \mathcal{C}) \leq \alpha < \frac{\delta}{2} - 3d_H(K, \mathcal{C});$$

alors

— $(K^\alpha)^c$ est homotopiquement équivalent à \mathcal{C}^c ,

— K^α est homotopiquement équivalent à \mathcal{C}^η , pour η suffisamment petit,

où K^α (respectivement \mathcal{C}^η) est le dilaté de K (respectivement de \mathcal{C}) par une boule de rayon α (respectivement de rayon η).

3 Étude locale de la discrétisation d'une forme CTLB

L'objectif de cette partie est de développer des outils pour pouvoir étudier la discrétisation d'une courbe CTLB. Certains résultats importants des parties suivantes consistent à montrer que la discrétisation d'une courbe CTLB est dépourvue de certaines configurations (proposition 7 et théorème 3). Les propositions suivantes sont des outils élémentaires permettant de déterminer si deux points adjacents d'une grille suffisamment fine appartiennent à la même composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ et ainsi d'exclure certaines configurations de la discrétisation d'une courbe CTLB.

Avant d'étudier la discrétisation des courbes CTLB, définissons le modèle de discrétisation utilisé. A un pas de grille fixé h , la *discrétisation de Gauss* d'une forme continue fermée S ayant pour bord la courbe de Jordan \mathcal{C} , est l'ensemble discret $S \cap h\mathbb{Z}^2$ notée $\text{Dig}_h(S)$. Un point de $h\mathbb{Z}^2$ est *intérieur* s'il appartient à S , *strictement intérieur* s'il appartient à $S \setminus \mathcal{C}$, *frontière* s'il appartient à \mathcal{C}

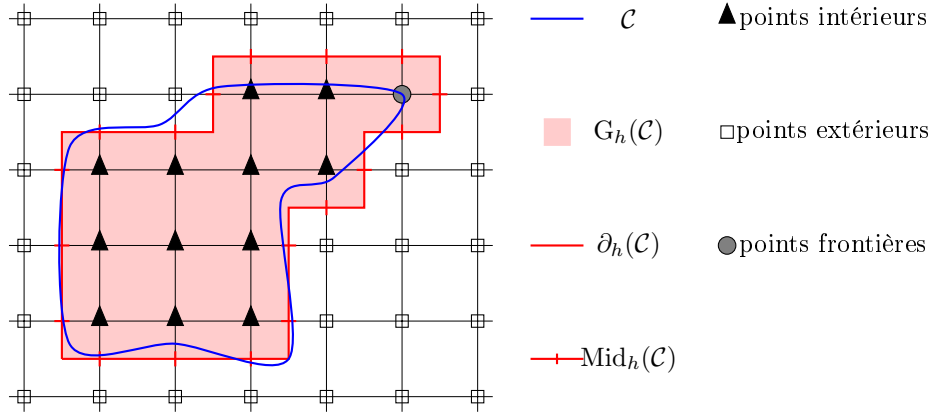


FIGURE 11 – La figure résume les notations définies ci-dessus.

et *extérieur* s'il appartient à $\mathbb{R}^2 \setminus S$. La *reconstruction* de S est la somme de Minkowski $\text{Dig}_h(\mathcal{C}) \oplus P$ avec $P = [-h/2, h/2]^2$. La frontière de la reconstruction de S est notée $\partial_h(\mathcal{C})$. On dit que $\partial_h(\mathcal{C})$ est la discrétisation de la courbe \mathcal{C} . L'ensemble $\partial_h(\mathcal{C})$ peut être vu comme un sous-graphe de la grille $(h/2, h/2) + h\mathbb{Z}^2$ (voir Figure 11). Un *point milieu* de $\partial_h(\mathcal{C})$ est le centre d'une arête de $\partial_h(\mathcal{C})$. L'ensemble des points milieux est noté $\text{Mid}_h(\mathcal{C})$. Soit $p \in \mathbb{R}^2$, on note P_p le carré $p \oplus P$. Lorsque $p \in h\mathbb{Z}^2$, P_p est un *pixel* et lorsque $p \in (h/2, h/2) + h\mathbb{Z}^2$ p est un *pixel dual*.

Une grille est suffisamment fine pour une courbe donnée si elle respecte les hypothèses de compatibilité (définition 9).

Définition 9 (Hypothèses de compatibilité). Une grille de pas h ou un carré de côté de longueur h est *compatible avec la courbe* \mathcal{C} si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. la courbe \mathcal{C} est (θ, δ) -CTLB avec $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$,
2. h est strictement plus petit que $\min(\frac{\sqrt{2}}{2}\delta, \frac{1}{2} \text{diam}(\mathcal{C}))$.

La conjecture 1 permettrait de simplifier les conditions de compatibilité énoncées ci-dessus.

Conjecture 1. Soit \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors le diamètre de \mathcal{C} est supérieur à $\sqrt{2}\delta$.

Nous définissons l'arc maximal de \mathcal{C} passant par un pixel dual T , la partie de \mathcal{C} qui détermine l'appartenance des sommets de T à une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

Définition 10 (Arc maximal passant par T). Soit $\theta \in (0, \pi/2]$ et \mathcal{C} une courbe de Jordan (θ, δ) -CTLB. Soit T un ensemble fermé dont le diamètre est strictement inférieur à δ . L'arc maximal de \mathcal{C} passant par T noté \mathcal{C}_T est défini

par :

$$\mathcal{C}_T := \bigcup_{a,b \in T \cap \mathcal{C}} \mathcal{C}_a^b \quad (1)$$

où \mathcal{C}_a^b est le plus petit arc entre a et b .

Proposition 5. *Soit $\theta \in (0, \pi/2]$ et \mathcal{C} une courbe de Jordan (θ, δ) -CTLB. Soit T un ensemble fermé inclus dans un disque ouvert $B(c, r)$ avec $r \leq \min(\frac{1}{2}\delta, \frac{\sqrt{2}}{4} \text{diam}(\mathcal{C}))$.*

Alors, l'arc maximal passant par T , \mathcal{C}_T , est l'unique arc de \mathcal{C} de courbure inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$ ayant ses extrémités dans T et tel que tout plus petit arc entre deux points de T est inclus dans \mathcal{C}_T . De plus,

$$(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_T) \cap T = \emptyset.$$

La proposition 6 et le lemme 2 permettent d'obtenir des informations sur l'arc maximal passant par \mathcal{C} connaissant la discrétisation de \mathcal{C} et ainsi d'aboutir à des contradictions pour exclure certaines configurations. La proposition 6 et le lemme 2 sont complémentaires : le premier traite les cas où la courbe \mathcal{C} ne passe pas par un sommet de T et le second ceux où la courbe \mathcal{C} passe par un sommet de T .

Proposition 6. *Soient \mathcal{C} une courbe de Jordan (θ, δ) -CTLB, T un carré compatible avec \mathcal{C} et a, b les extrémités de l'arc maximal passant par T . Deux sommets de T sont dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ si et seulement s'ils sont dans la même composante connexe de $T \setminus [a, b]$ et ne sont pas des points de la courbe \mathcal{C} .*

Lemme 2. *Soit \mathcal{C} une courbe de Jordan (θ, δ) -CTLB avec $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ et T un carré compatible avec la courbe \mathcal{C} . Si \mathcal{C} contient un sommet v de T alors ce sommet v est une des extrémités de l'arc maximal passant par T , ou l'arc \mathcal{C}_T est entièrement inclus dans les côtés T ayant v pour extrémité.*

4 Préservation de la topologie

Les résultats de la partie précédente nous ont permis d'exclure de la discrétisation d'une courbe compatible avec la grille les trois configurations décrites dans la figure 12 et ainsi de démontrer que sa discrétisation est bien composée.

Proposition 7. *Soit \mathcal{C} une courbe compatible avec une grille de pas h . Alors, la discrétisation de Gauss de \mathcal{C} pour un pas de grille h est bien composée.*

Proposition 8. *Soit S une forme compacte fermée dont le bord est une courbe compatible avec une grille de pas h . Alors la discrétisation de S est 4-connexe.*

Si les deux propositions précédentes indiquent que les frontières de la discrétisation ont de bonnes propriétés topologiques, la proposition 9 permet de situer les frontières de la forme continue par rapport aux frontières de la discrétisation.

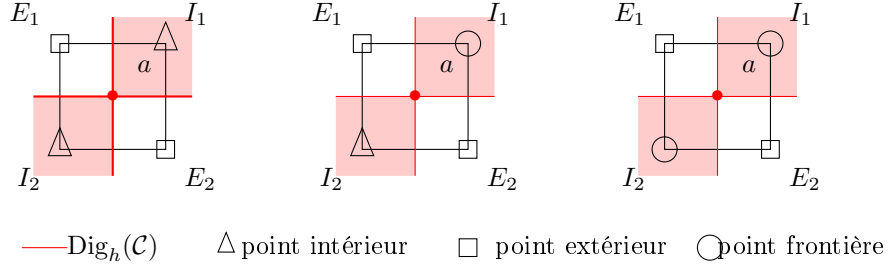


FIGURE 12 – Montrer que ces trois configurations n’apparaissent pas dans la discrétisation suffit à montrer que celle-ci est bien composée.

Proposition 9 (Corollary 5, [LQMBT20]). *Soit \mathcal{C} une courbe compatible avec la grille de pas h . Soit D la dilatation de $\partial_h(\mathcal{C})$ par le carré P_0 . La frontière de D est la réunion de au plus deux polygones dont les sommets sont les intersections de $h\mathbb{Z}^2$ et D . De plus \mathcal{C} est dans la boursoufflure de ∂D (voir figure 13).*

Les propriétés précédents nous assurent que la discrétisation d’une courbe CTLB possède les propriétés topologiques attendues. Ces propriétés vont nous permettre d’estimer des quantités géométriques sur des objets discrets.

5 Association

Afin de faire correspondre la partition d’une courbe \mathcal{C} et de sa discrétisation $\partial_h(\mathcal{C})$, on fait correspondre les points délimitant la partition de $\partial_h(\mathcal{C})$ aux points délimitant une partition de \mathcal{C} . Pour qu’une suite (ξ_i) de points de la courbe \mathcal{C} associés à une suite (a_i) de points de $\partial_h(\mathcal{C})$ délimite une partition de \mathcal{C} , il faut que (ξ_i) soit ordonnée par rapport à un ordre de parcours de \mathcal{C} . De plus, pour comparer les longueurs des polygones respectivement définis par les suites (a_i) et (ξ_i) , on demande que le point ξ_i soit proche du point (a_i) . Le meilleur choix de points échantillonnant la courbe \mathcal{C} sont les points milieux, car ce sont les seuls qui sont garantis d’être à distance inférieure à $\frac{h}{2}$ de \mathcal{C} (voir Propriété 9).

Définition 11 (Association). Soit \mathcal{C} une courbe de Jordan compatible avec une grille de pas h . Notons t_p l’arête de la grille duale orthogonale à $\partial_h(\mathcal{C})$ et de milieu p . Une application $\xi: \text{Mid}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est une *association* si pour tout $p \in \text{Mid}_h(\mathcal{C})$, $\xi(p) \in t_p$.

Il est à noter que nous ne proposons pas de construction d’une association, mais seulement la preuve de son existence (c’est-à-dire qu’en tout point $p \in \text{Mid}_h(\mathcal{C})$, t_p intersecte \mathcal{C}). Une telle construction n’aurait que peu d’intérêt dans la mesure où la courbe \mathcal{C} n’est pas elle-même connue (contrairement à sa discrétisation $\partial_h(\mathcal{C})$).

L’application association (définition 11) choisie n’est pas forcément injective (voir figure 14). Il est donc nécessaire de généraliser la notion de chaîne (c’est-à-dire d’ordre strict sur une courbe) à la notion de semi-chaîne.

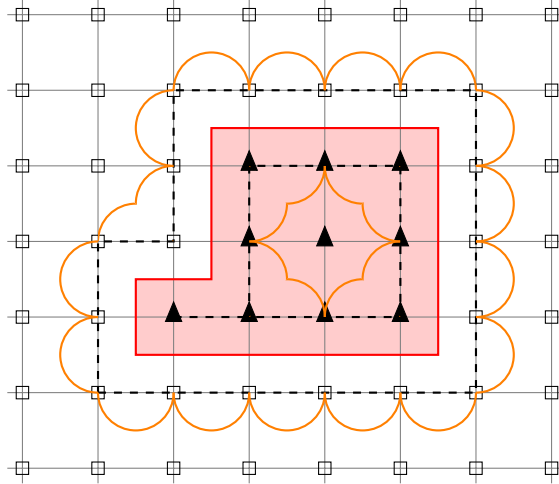


FIGURE 13 – La figure représentée en orange la boursouffure de la dilatation de D décrite dans la proposition 9. Les pixels allumés sont représentés en rouge. Les triangles pleins représentent les points de $h\mathbb{Z}^2$ appartenant à la discrétisation de Gauss et les carrés représentent les autres points de $h\mathbb{Z}^2$.

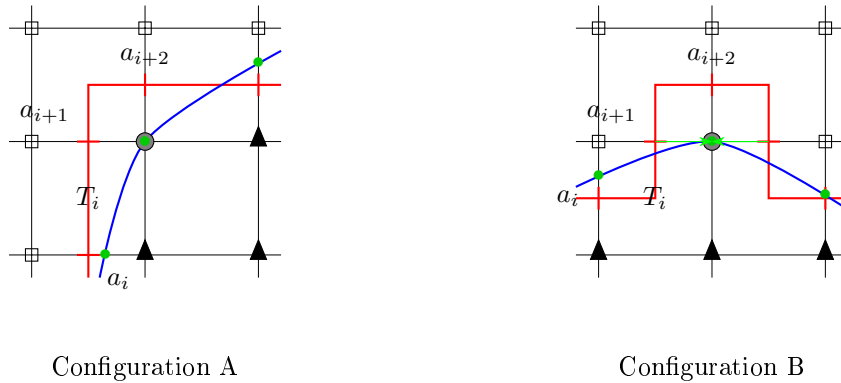


FIGURE 14 – Il se peut que plusieurs points a_j de $\text{Mid}_h(\mathcal{C})$ soient associés à un même point de \mathcal{C} . Les configurations A et B en fournissent des exemples. La courbe bleue représente \mathcal{C} , la courbe rouge $\partial_h(\mathcal{C})$, les traits rouges les points de $\text{Mid}_h(\mathcal{C})$, les points verts leurs image par une association. Les carrés représentent les points de $h\mathbb{Z}^2$ à l'extérieur de \mathcal{C} , les triangles les points à l'intérieur de \mathcal{C} et le cercle un point sur \mathcal{C} .

Définition 12 (Semi-chaîne). Une suite $(\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ de points d'une courbe simple forme une *semi-chaîne*

- s'il existe une paramétrisation injective γ de \mathcal{C} telle que pour tout $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $j \in \llbracket i+1, N-1 \rrbracket$, il existe t_i et t_j tels que $\gamma(t_i) = \xi_i$ et $\gamma(t_j) = \xi_j$ et $t_i \leq t_j$
- ou s'il existe $e \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ tel que $(\xi_{i+e})_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ est une semi-chaîne.

La permutation cyclique e permet de faire commencer la paramétrisation de \mathcal{C} au terme approprié de la séquence. En effet, si a et b sont deux points distincts de \mathcal{C} , il n'existe pas de paramétrisation injective $\gamma : [0, t_f[\rightarrow \mathcal{C}$ de \mathcal{C} telle que $\gamma(t_1) = a$, $\gamma(t_2) = b$ et $\gamma(t_3) = a$ avec $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 < t_f$. Il existe en revanche une paramétrisation injective $\gamma : [0, t_f[\rightarrow \mathcal{C}$ de \mathcal{C} telle que $\gamma(t_1) = a$, $\gamma(t_2) = a$ et $\gamma(t_3) = b$. En choisissant $e := -1$, la suite (a, b, a) est une semi-chaîne de \mathcal{C} .

Définition 13 (Association croissante). Une association $\xi : \text{Mid}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est *croissante* s'il existe une chaîne de $\partial_h(\mathcal{C})$ formée de tous les éléments de $\text{Mid}_h(\mathcal{C})$ telle que $(\xi(a_i))_{i=1}^N$ soit une semi-chaîne de \mathcal{C} .

La proposition suivante énonce qu'une association est croissante pour les courbes CTLB.

Proposition 10. *Soit \mathcal{C} une courbe compatible avec la grille de pas h . Toute association $\xi : \text{Mid}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ est croissante. De plus, si $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ est une chaîne de tous les points milieux de $\partial_h(\mathcal{C})$ avec $N \geq 7$ alors :*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \mathcal{C}_i,$$

où \mathcal{C}_i est le plus petit arc entre $\xi(a_i)$ et $\xi(a_{i+1})$ et l'intersection entre \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j avec $i \neq j$ est soit vide soit réduite à un point.

La preuve de cette dernière proposition repose sur l'exclusion de certaines configuration pathologiques où une courbe pourrait intersecter à plusieurs reprises un segment t_p . La proposition 10 garantit également que les points de \mathcal{C} associés aux points milieux de $\partial_h(\mathcal{C})$ se répartissent correctement sur \mathcal{C} (voir figure 15). Le théorème 3 permet de préserver le résultat énoncé dans la proposition 10 en sous-échantillonnant les points milieux.

Théorème 3. *Soit \mathcal{C} une courbe compatible avec la grille de pas h et soit $\xi : \text{Mid}_h(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ une association. En notant $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ une chaîne de tous les points de $\text{Mid}_h(\mathcal{C})$, soit $(a_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{Z}/N_\sigma\mathbb{Z}}$ une sous-suite de (a_i) avec $N_\sigma \geq 7$ (autrement dit $(a_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{Z}/N_\sigma\mathbb{Z}}$ est aussi une chaîne de $\partial_h(\mathcal{C})$) telle que $|\sigma(k+1) - \sigma(k)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}h} - 1$, alors*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}/N_\sigma\mathbb{Z}} \mathcal{C}'_k,$$

où \mathcal{C}'_k est le plus petit arc entre $\xi(a_{\sigma(k)})$ et $\xi(a_{\sigma(k+1)})$. De plus, l'intersection entre deux arcs \mathcal{C}'_i et \mathcal{C}'_j où $i \neq j$ est soit vide soit réduite à un point.

Le théorème 3 nous permet dans la partie suivante de démontrer la convergence des estimateurs non-locaux.

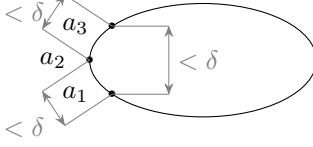


FIGURE 15 – La suite $[\xi_0, \xi_1, \xi_2]$ est telle que $d(\xi_{k+1}, \xi_k) < \delta$ pour tout $k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Cependant, la somme des longueurs des trois petits arcs délimités par ξ_0, ξ_1 et ξ_2 n'est pas égale à celle de la courbe (ces arcs se recouvrent mutuellement). D'où la nécessité de garantir une partition de \mathcal{C} en petits arcs.

6 Estimation de longueurs

Cette partie généralise les résultats de convergence des estimateurs non-locaux de longueur obtenues sur des graphes de fonctions ([MB16]) aux courbes paramétrées. La majoration de l'erreur commise par un estimateur de longueur non-local se décompose en deux étapes : majorer la différence de longueurs d'un polygone inscrit dans \mathcal{C} et la longueur de \mathcal{C} et majorer la différence de longueur entre un polygone dont les sommets sont sur $\partial_h(\mathcal{C})$ et un polygone dont les sommets sont sur \mathcal{C} (comparaison rendue possible grâce à l'association). Afin de permettre une utilisation concrète de nos résultats, nous nous efforcerons d'établir non seulement la convergence multirésolution de cette erreur d'estimation, mais aussi la vitesse de cette convergence et lorsque cela est possible une majoration de l'erreur pour un pas de grille h fixé.

6.1 Écart de longueur entre les cordes et la courbe

L'objectif de cette sous partie est de majorer la différence entre la longueur d'une courbe et la longueur d'un polygone inscrit et d'étudier la convergence de cette différence lorsque la taille des côtés du polygone tend vers 0 (c'est-à-dire que leur nombre tend vers $+\infty$). La vitesse de convergence de la différence dépend de la taille moyenne des côtés du polygone et de la régularité de la courbe. On distingue deux cas. Le premier considéré comme le cas régulier est le cas des courbes à courbure totale lipschitzienne, le second considéré comme le cas irrégulier est le cas des courbes à courbure totale localement bornée. Une majoration de la différence des longueurs ne pourra être fournie que dans le premier cas. La preuve de la première proposition se base sur le théorème de Schur, celle de la deuxième proposition sur la propriété 7.

On note M_α la moyenne suivante :

$$M_\alpha((x_i)_{i=0}^{N-1}) := \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

et

$$M_\infty((x_i)_{i=0}^{N-1}) := \max_i |x_i|.$$

La courbure totale d'un arc et la distance entre ses extrémités permet de majorer sa longueur.

Propriété 7 ([AR89], Theorem 5.8.1 p. 151). *Soit \mathcal{C} un arc tel que $\kappa(\mathcal{C}) < \pi$ et soit d la distance entre ses extrémités. Alors,*

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) \leq \frac{d}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C})}{2}}.$$

La majoration est atteinte si l'arc est une ligne polygonale de deux côtés de mêmes tailles.

Proposition 11. *Soit \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ et ayant une courbure totale $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. Soit (L_k) une suite de lignes polygonales séparant la courbe \mathcal{C} en petits arcs tels que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_\infty(L_k) = 0$. Alors*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(L_k) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$$

et

$$|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(L_k)| = O\left(\frac{(M_3^k(L_k))^3}{M_1^k(L_k)}\right).$$

Nous obtenons une majoration explicite pour tout k tel que $M_\infty(L_k) < \min(2r, \delta)$,

$$|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(L_k)| \leq N_k \left(2r \arcsin\left(\frac{M_\infty(L_k)}{2r}\right) - M_\infty(L_k)\right).$$

La majoration fournie par la proposition 11 est atteinte pour un cercle de rayon r .

Proposition 12. *Soit \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\delta > 0$. Soit (L_k) une suite de polygones séparant la courbe \mathcal{C} en petits arcs et soit $\mu \in]0, 1[$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt{N_k} M_\infty(L_k)^{2\mu} = 0$, où N_k est le nombre de sommets de L_k . Alors,*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(L_k) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$$

Plus précisément,

$$|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(L_k)| = O(\sqrt{N_k} M_\infty(L_k)^{2\mu}) + O(M_\infty(L_k)^{1-\mu}).$$

La majoration utilisée pour obtenir la vitesse de convergence est atteinte par une certaine courbe pour chaque $M_{+\infty}(L_k)$ fixé. Cependant à des tailles maximales $M_{+\infty}(L_k)$, les majorations sont atteintes pour des courbes différentes. Ainsi la vitesse de convergence de la proposition 12 ne semble pas optimale.

6.2 Différence de longueur entre la polygonalisation de la discrétisation et la courbe

Pour une courbe CTLB \mathcal{C} donnée et la famille de ses discrétisations de Gauss $\{\text{Dig}_h(\mathcal{C})\}_h$, les résultats des parties 5 et 6.1 permettent de prouver la convergence d'estimateurs de longueur de \mathcal{C} . La longueur estimée est la longueur d'un polygone dont les sommets appartiennent à $\{\text{Dig}_h(\mathcal{C})\}_h$. La convergence est obtenue lorsque l'on contrôle la taille moyenne des côtés d'un tel polygone lorsque h tend vers 0.

Théorème 4. *Soit \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ ayant une courbure totale $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. Pour tout $h > 0$, soit \mathcal{A}_h une sous-suite de points milieu $(a_{\sigma(i)}^h)_{i \in \mathbb{Z}/N_h\mathbb{Z}}$ telle que*

- *il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h < h_0$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}/N_h\mathbb{Z}$,*
 $|\sigma(i+1) - \sigma(i)| < \delta/(\sqrt{2}h) - 1,$
- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h)),$
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0.$

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathcal{A}_h) = \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

et

$$|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| = O_{h \rightarrow 0} \left(\frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} + \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right).$$

Nous obtenons une majoration explicite pour tout h tel que $M_\infty(\mathcal{A}_h) < \min(2r, \delta) - h$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}/N_h\mathbb{Z}$, $|\sigma(i+1) - \sigma(i)| < \delta/(\sqrt{2}h) - 1,$

$$|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| \leq N_h \left(2r_1 \arcsin \left(\frac{M_\infty(\mathcal{A}_h) + h}{2r_1} \right) - M_\infty(\mathcal{A}_h) \right).$$

où $r_1 := \min(r, \frac{\delta}{2})$.

Pour $M_1(\mathcal{A}_h)$ fixé la meilleure vitesse de convergence est atteinte lorsque $M_3(\mathcal{A}_h) = M_1(\mathcal{A}_h) : O(M_1(\mathcal{A}_h)^2 + \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)})$. La meilleure vitesse de convergence est alors $O(h^{2/3})$ atteinte lorsque \mathcal{A}_h a ses côtés de taille proportionnels à $h^{1/3}$. De plus, on remarque que toute courbe par(r)-régulière est $(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}r)$ -CTLB et sa courbure totale est $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne. Ainsi le théorème 4 s'applique avec $r_1 := \min(r, \delta/2) = \frac{\sqrt{2}}{2}r$.

Théorème 5. *Soit \mathcal{C} une courbe (θ, δ) -CTLB avec $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\delta > 0$. Pour tout $h > 0$, soit \mathcal{A}_h une sous-suite $(a_{\sigma(i)}^h)_{i \in \mathbb{Z}/N_h\mathbb{Z}}$ de points milieu de taille N_h tel que*

- *pour tout $i \in \mathbb{Z}/N_h\mathbb{Z}$, $|\sigma(i+1) - \sigma(i)| < \delta/(\sqrt{2}h) - 1,$*
- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h)),$
- *il existe $\mu \in]0, 1[$ tel que $M_\infty(\mathcal{A}_h)^{4\mu} = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h)).$*

Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}(\mathcal{A}_h) = \mathcal{L}(\mathcal{C}).$$

Plus précisément,

$$\|\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)\| = O_{h \rightarrow 0} \left(M_\infty(\mathcal{A}_h)^{2\mu} M_1(\mathcal{A}_h)^{-1/2} + M_\infty(\mathcal{A}_h)^{1-\mu} + h M_1(\mathcal{A}_h)^{-1} \right).$$

Le paramètre μ doit être correctement choisi pour pouvoir utiliser le théorème 5. Pour $M_\infty(\mathcal{A}_h)$, fixé la meilleure vitesse de convergence pour une courbe \mathcal{C} inconnue, est atteinte lorsque $M_1(\mathcal{A}_h)$ est maximal, c'est-à-dire quand $M_1(\mathcal{A}_h) = M_\infty(\mathcal{A}_h)$: le polygone inscrit dans $\text{Dig}_h(\mathcal{C})$ a tous ses côtés de même taille. Dans ce cas, le meilleur choix pour le paramètre μ est $\frac{1}{2}$ et la vitesse de convergence est $O(M_\infty^{1/2}(\mathcal{A}_h) + h M_\infty(\mathcal{A}_h))$.

7 Conclusion et perspectives

Nous avons introduit une nouvelle hypothèse pour contrôler la perte d'information due à la discrétisation en deux dimensions. Ce contrôle permet de garantir certaines propriétés topologiques de la discrétisation et de garantir une bonne estimation de la longueur.

Deux principaux axes se dégagent pour la poursuite de la thèse.

Le premier axe consiste à déterminer si notre démarche est généralisable à d'autres estimateurs que les estimateurs de longueur (par exemple estimateurs de courbure totale). L'objectif serait d'aboutir à une théorie de l'intégration sur des courbes du plan adapté au cadre de la géométrie discrète. L'une des étapes importantes dans ce sens a été réalisée par la preuve de la croissance de l'association (théorème 3) permettant d'associer en respectant l'ordre une suite de points (a_i) de la courbe discrète à une suite de points (ξ_i) de la courbe continue. Deux points importants restent à étudier : est-il possible d'estimer l'intégrale d'une certaine fonction le long d'une courbe à partir de l'évaluation de cette fonction en points échantillonnant la courbe ? Est-il possible de majorer l'erreur d'estimation de l'intégrale causée par l'erreur de positionnement des points d'échantillonnage de la courbe continue due à la discrétisation ? Sur un segment, la méthode composée de la quadrature permet d'obtenir une convergence de l'estimation lorsque le pas h de la grille tend vers 0 [Dem06]. Il reste à transférer cette propriété sur une courbe (pas forcément régulière) et à obtenir une vitesse de convergence. Il sera probablement nécessaire d'imposer certaines conditions sur la fonction que l'on souhaite intégrer.

Il est à noter que nous ne nous intéressons pas directement aux estimateurs d'opérateurs différentiels. D'une part, sauf à imposer des conditions de régularité assez contraignantes sur la courbe, il nous semble peu judicieux d'estimer une quantité dépendant d'un voisinage arbitrairement petit et ainsi très sensible à l'erreur de discrétisation. En revanche l'intégrale de telles quantités peut présenter de meilleures propriétés : potentiellement plus robuste au bruit et définie sur une famille de courbes plus vastes. Par exemple, si la tangente n'est définie que sur des courbes C^1 , son intégrale (la longueur) est définie sur des courbes irrégulières, de même la courbure est définie sur des courbes C^2 , mais son intégrale (la courbure totale) est aussi définie sur des courbes irrégulières. Il reste à

déterminer si l'intégrale de ces quantités peuvent se substituer aux opérateurs différentiels dans leurs applications en géométrie discrète.

Le second axe consiste à généraliser la condition CTLB aux surfaces dans l'espace à trois dimension. Si la définition s'étend naturellement, beaucoup de propriétés semblent différer en trois dimensions. En particulier, il n'est pas raisonnable de s'attendre à ce que la discrétisation de telle surface soit bien composée. Il existe en effet des surfaces à courbure arbitrairement faible dont la discrétisation n'est pas bien composée (Figure 4 [SLS07]). En revanche, il a été montré que la discrétisation de certaines classes de surfaces dite quasi-régulières ont une discrétisation 6-connexe [NKDRP17]. Une voie pour montrer que la discrétisation d'une surface CTLB est 6-connexe serait alors de montrer qu'une surface CTLB est quasi-régulière.

Références

- [AKKO01] Asano, Kawamura, Klette, and Obokata. Minimum length polygons in approximation sausages. 2001.
- [AR89] A. D. Alexandrov and Yu. G. Reshetnyak. *General Theory of Irregular Curves*, volume 29 of *Mathematics and Its Applications*. Springer Netherlands, Dordrecht, 1989.
- [Bob08] Alexander I. Bobenko, editor. *Discrete differential geometry*. Number v. 38 in Oberwolfach seminars. Birkhäuser, Basel; Boston, 2008. OCLC : ocn183149399.
- [CCSL09] Frédéric Chazal, David Cohen-Steiner, and André Lieutier. A Sampling Theory for Compact Sets in Euclidean Space. *Discrete & Computational Geometry*, 41(3) :461–479, April 2009.
- [Dem06] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences. EDP Sciences, Les Ulis, France, nouv. ed edition, 2006. OCLC : 255664496.
- [dVL09] François de Veilleville and Jacques-Olivier Lachaud. Comparison and improvement of tangent estimators on digital curves. *Pattern Recognition*, 42(8) :1693–1707, August 2009.
- [Fed69] Herbert Federer. Curvature measure. 1969.
- [GL95] Ari Gross and Longin Latecki. Digitizations Preserving Topological and Differential Geometric Properties. page 29, 1995.
- [KR04] Klette and Rosenfeld. *Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. 2004.
- [KZ00] Klette and Zunic. Multigrid convergence of calculated features in image analysis. 2000.
- [Lac] Jacques-Olivier Lachaud. Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète. page 176.

- [LQMBT19] Etienne Le Quentrec, Loïc Mazo, Etienne Baudrier, and Mohamed Tajine. Local turn-boundedness : a curvature control for a good digitization. In Michel Couprie, Jean Cousty, Yukiko Kenmochi, and Nabil Mustafa, editors, *21st IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Discrete Geometry for Computer Imagery, 21th IAPR International Conference, DGCI 2019, Paris, France, March 2019.
- [LQMBT20] Étienne Le Quentrec, Loïc Mazo, Étienne Baudrier, and Mohamed Tajine. Local Turn-Boundedness : A Curvature Control for Continuous Curves with Application to Digitization. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, April 2020.
- [LT14] Jacques-Olivier Lachaud and Boris Thibert. Properties of gauss digitized shapes and digital surfaces integration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2014.
- [MB16] Loïc Mazo and Étienne Baudrier. Non-local estimators : A new class of multigrid convergent length estimators. *Theoretical Computer Science*, 645 :128–146, September 2016.
- [Mil50] J. W. Milnor. On the Total Curvature of Knots. *The Annals of Mathematics*, 52(2) :248, September 1950.
- [MKS09] Hans Meine, Ullrich Köthe, and Peer Stelldinger. A topological sampling theorem for robust boundary reconstruction and image segmentation. *Discrete Applied Mathematics*, 157(3) :524–541, 2009. International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery.
- [NKDRP17] Phuc Ngo, Yukiko Kenmochi, Isabelle Debled-Rennesson, and Nicolas Passat. Convexity-Preserving Rigid Motions of 2D Digital Objects. In Walter G. Kropatsch, Nicole M. Artner, and Ines Janusch, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 10502, pages 69–81. Springer International Publishing, Cham, 2017. Series Title : Lecture Notes in Computer Science.
- [Pav82] Theo Pavlidis. *Algorithms for Graphics and Image Processing*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [Ser82] Jean Paul Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, London ; New York, 1982.
- [SLS07] Peer Stelldinger, Longin Latecki, and Marcelo Siqueira. Topological Equivalence between a 3D Object and the Reconstruction of Its Digital Image. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(1) :126–140, January 2007.
- [ST08] Peer Stelldinger and Kasim Terzic. Digitization of non-regular shapes in arbitrary dimensions. *Image and Vision Computing*, 26(10) :1338–1346, 2008.
- [SZS98] Sloboda, Zatko, and Stoer. On approximation of planar one-dimensional continua. *Journal of Mathematical Image and Vision*, 1998.

- [TD11] Mohamed Tajine and Alain Daurat. Patterns for multigrid equidistributed functions : Application to general parabolas and length estimation. *Theoretical Computer Science*, 412(36) :4824–4840, August 2011.