

# Séparation de sources retardées et paramétriques

Hassan MORTADA<sup>1</sup>, Vincent MAZET<sup>1</sup>, Charles SOUSSEN<sup>2</sup>, Christophe COLLET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ICUBE, Université de Strasbourg - CNRS, 67412 Illkirch, France

<sup>2</sup>Université de Lorraine et CNRS, CRAN, 54518 Vandœuvre-lès-Nancy, France

{mortada, vincent.mazet, c.collet}@unistra.fr, charles.soussen@univ-lorraine.fr

**Résumé** – Cette article traite de la séparation de sources retardées (ou anéchoïque) dans le cas de sources paramétriques et déterministes, potentiellement très corrélées. Une méthode de moindres carrés alternés est proposée pour estimer les paramètres des sources, les coefficients de mélange et les retards. Les retards sont estimés grâce à un algorithme de déconvolution parcimonieuse conçu pour la séparation de sources retardées et permettant une estimation continue des retards. Les simulations numériques montrent l’efficacité de l’algorithme proposé par rapport aux méthodes de l’état de l’art dans le cas de sources gaussiennes corrélées.

**Abstract** – This paper addresses delayed (or anechoic) source separation in the case of parameterized deterministic sources, possibly highly correlated. An alternative least squares scheme is proposed to estimate the source parameters, the mixing coefficients and the delays. The delays are estimated with an effective sparse deconvolution algorithm designed for delayed source separation and allowing continuous delay estimation. Numerical simulations demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm compared to state-of-the-art methods for highly correlated Gaussian sources.

## 1 Introduction

La séparation de sources retardées est un cas particulier de la séparation de sources convolutive [3] où chaque source intervient au plus une fois dans chaque mélange et est invariante à la translation. Ce modèle apparaît par exemple en traitement du signal audio [13] ou en acoustique sous-marine [15]. Ce travail a pour origine l’étude de la cinématique des galaxies [17] où les données sont des images multispectrales : chaque pixel est associé à un spectre d’émission, dont les raies doivent être estimées alors qu’elles subissent des retards différents dans chaque spectre en raison du mouvement interne du gaz par effet Doppler. Cela justifie le modèle de sources retardées, où les sources et les mélanges sont respectivement associés aux raies d’émission et aux spectres.

Comme le problème de séparation de sources retardées est mal-posé, il est nécessaire d’introduire des hypothèses fortes pour discriminer les sources. La plupart des méthodes supposent que les sources sont indépendantes, c’est le cas de l’analyse en composantes indépendantes retardées [10]. L’indépendance des sources peut être promue de différentes manières, par exemple avec les méthodes statistiques d’ordre deux dans le domaine temporel [2, 8] ou fréquentiel [15, 19]. Une autre stratégie est de traiter les données dans un domaine où les sources sont disjointes ou non corrélées, souvent le domaine temps-fréquence [13, 14, 20]. Cependant, les hypothèses d’indépendance et de non-corrélation ne sont pas toujours valides, et les méthodes précédentes ne peuvent souvent pas être utilisées [11]. Une tentative pour séparer des sources corrélées est proposée dans [5] en effectuant

au préalable une décomposition parcimonieuse des mélanges, puis en utilisant une procédure d’appariement des sources obtenues. Cependant, cette méthode présente le risque de propager les erreurs. Dans [1, 12], l’hypothèse de non-corrélation est relaxée en introduisant le concept de sources partiellement corrélées. Cette technique est toutefois limitée au problème de séparation de sources instantanées.

Ainsi, le cas difficile de sources retardées et corrélées est partiellement couvert, donc de nouveaux algorithmes doivent être proposés. Nous proposons une méthode originale qui tient compte d’une connaissance *a priori* sur la forme des sources permettant de les modéliser par une fonction paramétrique. La séparation de sources paramétriques peut paraître plus facile que la séparation aveugle puisque la forme des sources est imposée, mais les sources paramétriques sont souvent corrélées, surtout si elles sont modélisées par la même fonction. Par exemple, les raies d’émissions dans l’étude de la cinématique des galaxies sont modélisées par une gaussienne [18, pp.191-192], ce qui aboutit à des sources extrêmement corrélées.

L’estimation des paramètres des sources dans un mélange unique s’apparente à la déconvolution parcimonieuse où des versions retardées d’une fonction sont regroupées dans un dictionnaire [6, 7]. Nous étendons cette idée au cas de plusieurs mélanges et en considérant plusieurs fonctions sources dont les paramètres de formes sont inconnus et doivent être estimés. De plus, notre approche exploite des résultats récents en déconvolution parcimonieuse permettant l’estimation continue des retards [6, 7]. Enfin, la paramétrisation des sources permet de ne pas avoir à stocker le dictionnaire.

Le problème est formulé dans la section 2 et son optimisation

avec un algorithme de moindres carrés alternés (ALS : *Alternating Least Squares*) est présenté section 3. Des simulations numériques illustrent la performance de l'algorithme dans la section 4.

## 2 Formulation du problème

Chaque mélange  $\mathbf{x}_i$  est modélisé comme la combinaison linéaire de  $J$  sources paramétriques retardées  $\mathbf{s}_j$  de paramètre de forme  $w_j$  :

$$\mathbf{x}_i(\lambda) = \sum_{j=1}^J a_{ij} \mathbf{s}_j(\lambda - c_{ij}; w_j) + \mathbf{n}_i(\lambda) \quad i = 1, \dots, I \quad (1)$$

où  $\mathbf{n}_i(\lambda)$  regroupe à la fois le bruit d'observation et les erreurs de modélisation. Notons que  $i$  peut être un indice bidimensionnel (indice d'un pixel dans une image multispectrale par exemple).

La séparation de sources revient à estimer les amplitudes  $a_{ij}$ , les retards  $c_{ij}$  et les paramètres de formes  $w_j$ . Elle peut se reformuler comme un problème de moindres carrés :

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{w}} \left\{ E(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^I \varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i, \mathbf{w}) \right\} \quad (2)$$

où  $\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i, \mathbf{w})$  est l'erreur quadratique moyenne du mélange  $i$  :

$$\varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i, \mathbf{w}) = \left\| \mathbf{x}_i(\lambda) - \sum_{j=1}^J a_{ij} \mathbf{s}_j(\lambda - c_{ij}; w_j) \right\|_2^2 \quad (3)$$

et  $\|\cdot\|_2$  est la norme  $\ell_2$  d'un vecteur de dimension finie,  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  représente les échantillons correspondant aux  $N$  observations (chaque mélange  $\mathbf{x}_i(\lambda)$  est un vecteur de taille  $N$ ), et  $\mathbf{s}_j(\lambda; w_j)$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  obtenu en échantillonnant la fonction  $\mathbf{s}_j$ . Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{C}$  et le vecteur  $\mathbf{w}$  sont donnés par :

- $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_I] \in \mathbb{R}^{J \times I}$  avec  $\mathbf{a}_i = [a_{i1}, \dots, a_{iJ}]^T$  ;
- $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_I] \in \mathbb{R}^{J \times I}$  avec  $\mathbf{c}_i = [c_{i1}, \dots, c_{iJ}]^T$  ;
- $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_J]^T \in \mathbb{R}^{J \times 1}$ .

La minimisation de (2) est détaillée dans la section suivante.

## 3 Estimation des paramètres

### Moindre carrés alternés

ALS est une stratégie de descente classique [4] consistant à minimiser un critère  $E$  suivant un groupe de variables alternativement. Dans le contexte de la séparation de sources retardées, plusieurs approches [10, 13, 19] font appel à une stratégie ALS où les sources sont mises à jour en fixant les amplitudes et les retards et vice-versa. Cependant, ces méthodes sont inadéquates pour des sources quelconques, et en particulier corrélées, car la résolution des sous-problèmes repose sur des hypothèses fortes (décorrélacion, indépendance).

Notre implémentation d'ALS est donnée dans l'algorithme 1 où le critère d'arrêt est lié à la différence relative de l'erreur

---

### Algorithme 1 : Moindres carrés alternés

---

**Entrées** : mélanges  $\mathbf{x}$ , paramètre d'arrêt  $\rho$

**Sorties** :  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{w}}$

**Initialisation** :  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{w}}$

- 1  $\hat{E} \leftarrow E(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{w}})$
  - 2 **Faire**
  - 3      $E^{\text{prec}} \leftarrow \hat{E}$
  - 4      $\hat{\mathbf{w}} \leftarrow \underset{\mathbf{w}}{\text{argmin}} E(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}, \mathbf{w})$
  - 5     **Pour**  $i = 1 : I$
  - 6          $(\hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{c}}_i) \leftarrow \underset{\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i}{\text{argmin}} \varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i, \hat{\mathbf{w}})$
  - 7     **Fin**
  - 8      $\hat{E} \leftarrow E(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{w}})$
  - 9 **Tant que**  $|E^{\text{prec}} - \hat{E}|/E^{\text{prec}} \geq \rho$
- 

d'approximation. Dans la première étape (ligne 4), l'estimation des sources est remplacée par l'estimation de leurs paramètres  $\mathbf{w}$  à l'aide de l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Dans la seconde étape (lignes 5–7), les retards  $\mathbf{C}$  et les amplitudes  $\mathbf{A}$  sont estimés conjointement. D'après (2), c'est un problème séparable menant à  $I$  sous-problèmes indépendants :

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{C}} E(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{w}) \Leftrightarrow \forall i, \min_{\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i} \varepsilon(\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i, \mathbf{w}) \quad (4)$$

Notons que le schéma ALS ne garantit pas de converger vers le minimum global de (2) car chaque étape de la minimisation est locale et  $E$  est une fonction non-convexe de  $(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{w})$ . Cependant, toutes les simulations effectuées conduisent à des estimations proches des valeurs réelles.

### Approche parcimonieuse pour l'estimation de $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{c}_i$

Chaque mélange  $\mathbf{x}_i$  est approximé par une combinaison linéaire de  $J$  sources  $\mathbf{s}_j(\lambda - c_{ij}; w_j)$  qui s'interprètent comme le filtrage d'une impulsion de retard  $c_{ij}$  par la fonction  $\mathbf{s}_j(\lambda; w_j)$ . La minimisation de (3) devient donc un problème d'approximation parcimonieuse de degré de parcimonie  $J$  avec la contrainte que chaque source n'est présente qu'une fois au sein d'un mélange. Les algorithmes gloutons sont simples et bien adaptés à ce problème car le nombre de sources  $J$  est faible. En particulier, l'algorithme OMP (*Orthogonal Matching Pursuit*) [16] sélectionne un à un les motifs retardés  $\mathbf{s}(\lambda - \ell\Delta; w_j)$  (où  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $\Delta$  est le pas d'échantillonnage des retards<sup>1</sup>). Ainsi, l'approximation parcimonieuse de  $\mathbf{x}_i$  est raffinée progressivement. Nous proposons d'adapter cet algorithme en imposant de sélectionner un seul motif retardé par source  $\hat{j}$ .

Une petite valeur de  $\Delta$  permet une estimation précise des retards, en contrepartie l'algorithme glouton devient moins performant puisque les versions retardées évaluées sont plus corrélées. Une alternative est d'utiliser l'algorithme IBOMP [7] qui permet une estimation continue des retards à partir d'échantillons discrets. Cette approche fait appel à un schéma d'interpolation

---

1. À distinguer du pas d'échantillonnage des données.

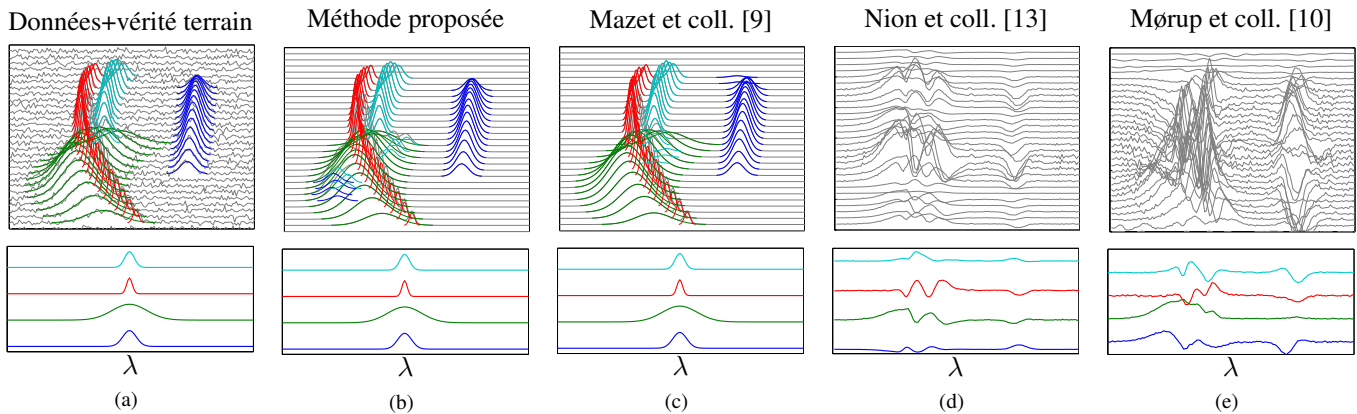


FIGURE 1 – Application de quatre méthodes sur les données de la première colonne, chaque source étant identifiée par une couleur. La première ligne correspond aux données et à l’estimation obtenue (b–c) ou aux mélanges reconstruits (d–e). La deuxième ligne représente les sources réelles (a) ou estimées (b–e).

**Algorithme 2 :** Estimation de  $\mathbf{a}_i$  et  $\mathbf{c}_i$  (ligne 6 de l’Algorithme 1)

**Entrées :** mélange  $\mathbf{x}_i$ , sources  $\mathbf{s}_j(\boldsymbol{\lambda}; w_j)$ , pas d’échantillonnage  $\Delta$

**Sorties :**  $\hat{\mathbf{a}}_i$  et  $\hat{\mathbf{c}}_i$

**Initialisation :**  $\mathcal{S} = \emptyset$ ,  $\mathcal{J} = \emptyset$ ,  $\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$

1 **Répéter  $J$  fois**

2  $(\hat{\ell}, \hat{j}) \leftarrow \underset{\substack{\ell \in \mathbb{N} \\ j \notin \mathcal{J}}}{\text{argmax}} \frac{\langle \mathbf{s}_j(\boldsymbol{\lambda} - \ell\Delta; w_j), \mathbf{x}_i - \mathbf{S}\hat{\mathbf{a}}_i \rangle}{\|\mathbf{s}_j(\boldsymbol{\lambda} - \ell\Delta; w_j)\|_2}$

3  $\mathcal{J} \leftarrow \mathcal{J} \cup \{\hat{j}\}$

4 Calculer  $\eta$  [7]

5  $\hat{\mathbf{c}}_{i\hat{j}} \leftarrow \hat{\ell}\Delta + \eta$

6 Inclure la colonne  $\mathbf{s}_{\hat{j}}(\boldsymbol{\lambda} - \hat{\mathbf{c}}_{i\hat{j}}; w_{\hat{j}})$  dans  $\mathcal{S}$

7  $\hat{\mathbf{a}}_i \leftarrow (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{x}_i$

8 Permuter  $\hat{\mathbf{a}}_i$  par rapport à  $\mathcal{J}$

introduit dans [6] : l’estimation discrète  $\ell\Delta$  d’un retard est raffinée en  $\ell\Delta + \eta$  où  $\eta \in [-\Delta/2, \Delta/2]$ . Les auteurs dans [6, 7] préconisent l’interpolation dite polaire.

L’algorithme 2 détaille l’estimation des amplitudes et des retards.  $\mathcal{J}$  est la liste des indices des sources sélectionnées. Les amplitudes  $\mathbf{a}_i$  sont estimées au sens des moindres carrés.

## 4 Résultats

Les performances de l’algorithme proposé sont évaluées sur des données synthétiques aux caractéristiques suivantes, motivées par la physique des galaxies [17] :

- les sources sont modélisées par des raies gaussiennes :  $\mathbf{s}_j(\boldsymbol{\lambda}; w_j) = \exp(-\boldsymbol{\lambda}^2/2w_j^2)$  ;
- les amplitudes sont positives ;
- les retards évoluent lentement d’un mélange à l’autre ;
- les sources n’apparaissent pas forcément dans tous les mélanges.

Le dernier point implique l’introduction d’un critère d’arrêt supplémentaire dans l’Algorithme 2 (ligne 1) : l’algorithme peut

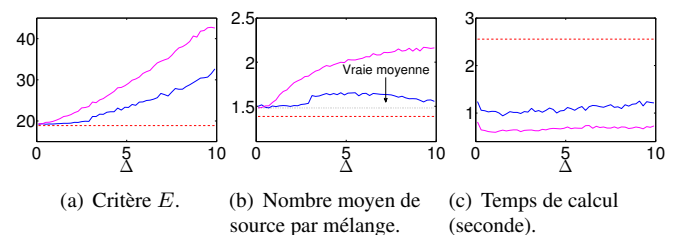


FIGURE 2 – Comparaison entre les versions discrète (magenta) et continue (bleue) de l’algorithme proposé et l’algorithme de [9] (rouge pointillé).

s’arrêter en moins de  $J$  itérations si le résidu  $\varepsilon(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{w})$  devient inférieur à la variance du bruit. Par ailleurs, il apparaît empiriquement qu’une seule itération de l’algorithme de Levenberg-Marquardt est suffisante à chaque itération ALS.

Dans une première simulation (Fig. 1),  $I = 30$  mélanges sont générés avec  $N = 150$  échantillons,  $J = 4$  sources, et un rapport signal sur bruit (RSB)<sup>2</sup> égal à 13 dB. Cette simulation présente deux difficultés majeures : le croisement de deux sources (sources rouge et verte) et la fin d’une source (verte) lorsqu’une autre débute (cyan). La méthode proposée est capable de séparer correctement les sources, au même titre que la méthode bayésienne [9]. Au contraire, les algorithmes classiques de séparation de sources retardées [10, 13] ne réussissent non seulement pas à retrouver les sources gaussiennes ni à reconstruire les mélanges. Cela s’explique par le fait que les hypothèses d’indépendance ou de décorrélation des sources ne sont pas valides dans notre application.

Une comparaison plus approfondie est ensuite effectuée entre la méthode proposée, sa version avec estimation discrète des retards ( $\eta = 0$ ) et la méthode de [9] (qui donne des résultats comparables contrairement à [10, 13]). Ainsi, 50 séquences de  $I = 40$  mélanges contenant  $J = 3$  sources sont générées avec des paramètres aléatoires et un RSB moyen de 15 dB. Des résultats similaires sont obtenus pour différents RSB (entre 0 et

2. Le RSB est défini comme dix fois le logarithme du rapport de la moyenne des énergies des mélanges non bruités sur la variance du bruit.

30 dB). Le critère d'arrêt est fixé à  $\rho = 10^{-6}$ . La figure 2 montre les résultats moyennés sur les 50 séquences pour différents pas d'échantillonnage des retards  $\Delta$  ([9] ne requiert pas de définir une grille des retards). En termes de qualité de reconstruction (Fig. 2(a)), la version continue est plus performante que la version discrète et aussi performante que [9] jusqu'à une certaine valeur de  $\Delta$  (dans nos simulations,  $\Delta \approx 2,9$  ce qui correspond à la moyenne des largeurs). De plus, le nombre de raies estimées avec la version continue est meilleur qu'avec la méthode [9] jusqu'à cette valeur de  $\Delta$  (Fig. 2(b)); au delà, le nombre de raies est surestimé, tandis que la version discrète surestime largement ce nombre quand  $\Delta$  devient grand. Enfin, la méthode proposée est  $\approx 2,5$  plus rapide que [9], quelle que soit la valeur de  $\Delta$  (Fig. 2(c)).

## 5 Conclusion et perspectives

Cet article présente une stratégie ALS pour la séparation de sources retardées qui peuvent être modélisées par des fonctions paramétriques. Le problème difficile d'estimation des retards est résolu grâce à un algorithme d'approximation parcimonieuse, qui par ailleurs permet l'estimation continue et donc précise des retards. La méthode proposée améliore sensiblement les performances des méthodes de l'état de l'art en séparation de sources retardées et corrélées. En outre, les simulations montrent que notre méthode est aussi performante qu'une méthode bayésienne pour un temps de calcul plus court et, de par sa modélisation, elle offre la possibilité d'être appliquée à une image multispectrale.

Motivés par l'application astrophysique, une première perspective est de considérer des sources de formes variables à travers les mélanges. Une seconde perspective est d'introduire une régularisation sur les retards pour modéliser leur évolution lente. Pour cela, nous avons étudié l'introduction d'une contrainte dans le problème (4) en imposant une distance maximale  $\tau$  entre le retard d'une raie et la moyenne des retards de la même source dans les mélanges voisins. Le problème (4) n'est alors plus séparable, pourtant l'évaluation dans l'algorithme 2 (ligne 2) des seules raies qui vérifient cette contrainte permet d'obtenir une évolution plus naturelle des retards (Fig. 3).

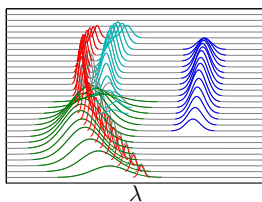


FIGURE 3 – Application de la contrainte aux données Fig. 1.

## Références

[1] J. Bobin, J. Rapin, A. Larue, and J.-L. Starck. Sparsity and adaptivity for the blind separation of partially correlated sources. *IEEE Trans. Signal Process.*, 63 :1199–1213, 2015.

[2] G. Chabriel and J. Barrère. An instantaneous formulation of mixtures for blind separation of propagating waves. *IEEE Trans. Signal Process.*, 54 :49–58, 2006.

[3] P. Comon and C. Jutten. Séparation de sources 1. concepts de base et analyse en composantes indépendantes, 2007.

[4] J. De Leeuw. Convergence of the majorization method for multi-dimensional scaling. *J. Classification*, 5, 1988.

[5] J. Duan. *Restoration and separation of piecewise polynomial signals. Application to Atomic Force Microscopy*. Phd thesis, Université Henri Poincaré, Nancy, 2010.

[6] C. Ekanadham, D. Tranchina, and E. P. Simoncelli. Recovery of sparse translation-invariant signals with continuous basis pursuit. *IEEE Trans. Signal Process.*, 59 :4735–4744, 2011.

[7] K. Fyhn, M. F. Duarte, and S. H. Jensen. Compressive parameter estimation for sparse translation-invariant signals using polar interpolation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 63 :870–881, 2015.

[8] N. Jiang and D. Farina. Covariance and time-scale methods for blind separation of delayed sources. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 58 :550–556, 2011.

[9] V. Mazet, S. Faisan, S. Awali, M.-A. Gaveau, and L. Poisson. Unsupervised joint decomposition of a spectroscopic signal sequence. *Signal Process.*, 109 :193–205, 2015.

[10] M. Mørup, K. H. Madsen, and L. K. Hansen. Shifted independent component analysis. In *ICA*, 2007.

[11] S. Moussaoui, D. Brie, A. Mohammad-Djafari, and C. Carteret. Separation of non-negative mixture of non-negative sources using a Bayesian approach and MCMC sampling. *IEEE Trans. Signal Process.*, 54 :4133–4145, 2006.

[12] W. Naanaa and J. M. Nuzillard. Blind source separation of positive and partially correlated data. *Signal Process.*, 85 :1711–1722, 2005.

[13] D. Nion, B. Vandewoestyne, S. Vanaverbeke, K. Abeele, H. Gerssem, and L. De Lathauwer. A time-frequency technique for blind separation and localization of pure delayed sources. In *LVA/ICA 2010*.

[14] L. Omlor and M. A. Giese. Anechoic blind source separation using Wigner marginals. *J. Mach. Learn. Res.*, 12 :1111–1148, 2011.

[15] W. Ouedraogo, B. Nicolas, B. Oudompheng, J. I. Mars, and C. Jutten. A frequency method for blind separation of an anechoic mixture. In *Proc. EUSIPCO*, 2014.

[16] Y. C. Pati, R. Rezaifar, and P. S. Krishnaprasad. Orthogonal matching pursuit : Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Proc. 27th Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, 1993.

[17] E. Villeneuve and H. Carfantan. Nonlinear deconvolution of hyperspectral data with MCMC for studying the kinematics of galaxies. *IEEE Trans. Image Process.*, 23 :4322–4335, 2014.

[18] M. Westmoquette. *Super-Star Clusters, Their Environment And Their Role In The Formation Of Galactic Winds*. Phd thesis, University College London, 2007.

[19] A. Yeredor. Blind source separation with pure delay mixtures. In *ICA*, 2001.

[20] Ö. Yilmaz and S. Rickard. Blind separation of speech mixtures via time-frequency masking. *IEEE Trans. Signal Process.*, 52 :1830–1847, 2004.