Transformations affines en précision arbitraire

Mots-clés

géométrie discrète, transformations affines, discrétisation, convergence multi-échelles, calcul réel exact, analyse non-standard, mathématique constructive

Encadrant référent

Loïc Mazo, Laboratoire ICube (Strasbourg)

Encadrants

NOM Prénom	Laboratoire
MAZO Loïc	ICube (Strasbourg)
JACOB - DA COL Marie-Andrée	ICube (Strasbourg)
MAGAUD Nicolas	ICube (Strasbourg)
FUCHS Laurent	XLIM (Poitiers)
LARGETEAU - SKAPIN Gaëlle	XLIM (Poitiers)

Résumé

L'utilisation de transformations affines ou linéaires – rotations, symétries, homothéties, transvections, etc. – est une opération courante en traitement d'image. Ces transformations sont associées à des matrices à coefficients réels. Parce que les nombres flottants ne peuvent pas coder les nombres réels, mais seulement un nombre fini de rationnels, les implantations des transformations affines ont le plus souvent des propriétés algébriques (bijectivité, ...), topologiques (connexité, ...) et géométriques (conservation des proportions,...) différentes des transformations qu'elles ont sensées représenter. Il est néanmoins possible de décrire ces applications affines à l'aide d'une version constructive de l'analyse non-standard, l'omega-arithmétisation des réels, qui ne requiert que des calculs sur les entiers. L'objet du stage est d'étudier l'apport de cette description dans une optique de convergence multi-échelles.

Contexte et objectifs du stage

Le modèle discret de la droite réelle que nous utiliserons dans ce stage, l'Ω-*arithmétisation* du réel, a été étudié dans la thèse d'A. Chollet [Cho10]. Il repose sur deux piliers.

— D'une part, sur les travaux de G. Reeb et J. Harthong en analyse non-standard qui ont débouché sur un modèle discret de $\mathbb{R}$ connu sous le nom de *droite d'Hartong-Reeb*. Ce modèle, bien qu'il postule l'existence de nombres infiniment grands, a permis à J.P. Reveillès d'établir un schéma de discrétisation à l'origine des droites digitales utilisées aujourd'hui en géométrie discrète.

— D'autre part, D. Laugwitz et C. Schmieden ont décrit une version constructive de l'analyse non-standard qui obtient les nombres infiniment grands sous forme de suites d'entiers appelées Ω-*nombres*.

L'Ω-arithmétisation a été testée sur le schéma d'Euler pour la résolution des équations différentielles et validée dans l'assistant de preuves Coq. Elle permet de calculer en utilisant uniquement des entiers et en observant les résultats à l'échelle de précision souhaitée.

Appliqué aux transformations affines de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, l'Ω-arithmétisation de $\mathbb{R}$ provoque l'apparition de suites d'*applications quasi-affines*, des transformations de $\mathbb{Z}^n$ produites par l'arrondi d'une transformation affine rationnelle [Maz16]. Certaines propriétés de ces applications quasi-affines ont été étudiées pour elles-mêmes, indépendamment du procédé d'Ω-arithmétisation, depuis plusieurs années, principalement par M.A. Jacob - Da Col [JM16].

Le travail proposé pendant le stage comporte deux volets.

- D'un point de vue théorique, l'Ω-arithmétisation fait intervenir des classes d'équivalences de suites de nombres entiers. Dès lors, se pose la question pratique du choix des représentants pour obtenir une convergence contrôlée. Le stagiaire étudiera si les algorithmes de V. Ménissier-Morain [Mén05] peuvent convenir à cette fin. Une implantation à l'aide des bibliothèques CREAL de J.C. Filliâtre (https ://www.lri.fr/ filliatr/creal.fr.html) ou XR de K. Briggs [Bri06] (http ://keithbriggs.info/xrc.html) pourrait alors être faite.
- Les applications quasi-affines découpent l'espace euclidien suivant un treillis régulier, périodique, décrit dans [JM16]. Le stagiaire s'intéressera à l'évolution de ce treillis dans le cadre de l'Ω-arithmétisation d'une application affine donnée. Ici aussi, une implantation est envisageable, en dimension 2 par exemple.

Références

[Bri06] Keith Briggs. Implementing exact real arithmetic in python, c++ and c. *Theoretical Computer Science*, 351(1) :74 – 81, 2006. Real Numbers and Computers. `https://doi.org/10.1016/j.tcs.2005.09.058`.

[Cho10] Agathe Chollet. *Non classical formalisms for the computing treatment of the topoligy and the discrete geometry.* Theses, Université de La Rochelle, December 2010. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00579781/file/TheseChollet.pdf`.

[JM16] M. A. Jacob-Da Col and L. Mazo. nD quasi-affine transformations. In *DGCI*, LNCS, pages 337–348, 2016. `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-32360-2_26`.

[Maz16] Loïc Mazo. Multi-scale arithmetization of the linear transformations. working paper or preprint, November 2016. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01405461`.

[Mén05] Valérie Ménissier-Morain. Arbitrary precision real arithmetic : design and algorithms. *J. Log. Algebr. Program.*, 64(1) :13–39, 2005. `https://doi.org/10.1016/j.jlap.2004.07.003`.